EXAMEN MATEMÁTICAS II PCE MAYO 2018

PREGUNTAS DEL TEST

1. El rango de la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Es:

Solución:

Para conocer el rango de la matriz A cálculo su determinante por la Regla de Sarrus:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 2 - 0 \cdot 2 \cdot 2 = 4 + 6 \neq 0$$

Como $|A| \neq 0$ *podemos asegurar que el Rg(A)=3.*

2. El conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 0} \\ \boldsymbol{x - y - z = 0} \end{cases}$$

Define:

Solución:

El sistema está formado por dos ecuaciones de tres incógnitas, como bien sabemos el sistema será compatible indeterminado (con un único parámetro), cuya solución será:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Es decir, su solución es la ecuación de una recta en paramétricas, por lo tanto la solución es una recta en el espacio.

3. **El valor del límite:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\boldsymbol{xsenx}}{\log(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{x^2})}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{xsenx}{log(1+x^2)}=\frac{0}{0}$$

Aplico la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{xsenx}{log(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{senx+xcosx}{\frac{2x}{1+x^2}}=\frac{0}{0}$$

Aplico nuevamente L'Hôpital:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{cosx+cosx-xsenx}{\frac{2(1+x^2)-2x2x}{(1+x^2)^2}}=\frac{2}{2}=1$$

4. **Las rectas:**

$$\boldsymbol{r_1}:\frac{\boldsymbol{x-2}}{\boldsymbol{1}}=\frac{\boldsymbol{y-3}}{\boldsymbol{3}}=\frac{\boldsymbol{z-1}}{\boldsymbol{1}}$$

$$\boldsymbol{r_2}:\frac{\boldsymbol{x-2}}{\boldsymbol{1}}=\frac{\boldsymbol{y-k}}{\boldsymbol{1}}=\frac{\boldsymbol{z-2}}{\boldsymbol{2}}$$

Se cortan en un punto para el valor de k:

Solución:

Paso r_1 a paramétricas y así obtengo el punto genérico de la recta en cuestión:

$$r_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Sustituyo x e z en r_2 para obtener t:

$$\frac{(2+t)-2}{1} = \frac{(1+t)-2}{2}$$

Y despejo hasta obtener: $t = -1$. Sustituyo t en la siguiente igualdad:

$$\frac{(3+3t)-k}{1} = \frac{(1+t)-2}{2}$$

Para obtener el valor de k:

$$\frac{3+3(-1)-k}{1} = \frac{1+(-1)-2}{2}$$

$$-k = -1$$

$$k = 1$$

5. **El área del triángulo cuyos vértices son los puntos $\boldsymbol{P = (1, 2, -3), Q = (-2, 1, 0)}$ y $\boldsymbol{0 = (0, 0, 0)}$ es:**

Solución:

Calculo los vectores $\overrightarrow{OP} = P - 0 = P$ y $\overrightarrow{OQ} = Q - 0 = Q$.

El área de un triángulo se calcula de la siguiente forma:

$$\acute{A}rea\ de\ un\ tri\acute{a}ngulo = \frac{\left|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}\right|}{2}$$

Lo calcularemos por separado:

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} - 5\vec{k} = (-3, -6, -5)$$

Calculamos el módulo del vector que acabamos de hallar:

$$\left|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 36 + 25} = \sqrt{70}$$

Luego:

$$\acute{A}rea\ de\ un\ tri\acute{a}ngulo = \frac{\sqrt{70}}{2}$$

6. **El coseno del ángulo $\boldsymbol{\theta}$ formado por los vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$, determinados por los puntos $\boldsymbol{A} = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$, $\boldsymbol{B} = (\mathbf{3}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ y $\boldsymbol{C} = (\mathbf{4}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$, es:**

Solución:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| * \left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1{,}0)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2{,}0{,}2)$$

$$\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC} = 1 \cdot 2 + 0 + 0 = 2$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{16}} = \frac{1}{2}$$

7. **La función**

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}}$$

Corta en el eje X en:

Solución:

Una función corta en el eje OX cuando y=0, por lo tanto igualaremos nuestra función a 0 y calcularemos el valor de x:

$$0 = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

$$0 = x^3$$

$$\sqrt[3]{0} = x$$

$$x = 0$$

Por tanto $f(x)$ corta en un único punto.

8. **La gráfica de la función f(x) tiene como asíntota la recta:**

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}}$$

Solución:

En primer lugar veamos si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Como no tiene asíntotas horizontales veamos si tiene asíntotas oblicuas. Si las hubiera, estas serán de la forma $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3 + x - 2x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 - x + 2x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x + 2x^2}{(x-1)^2} = 2$$

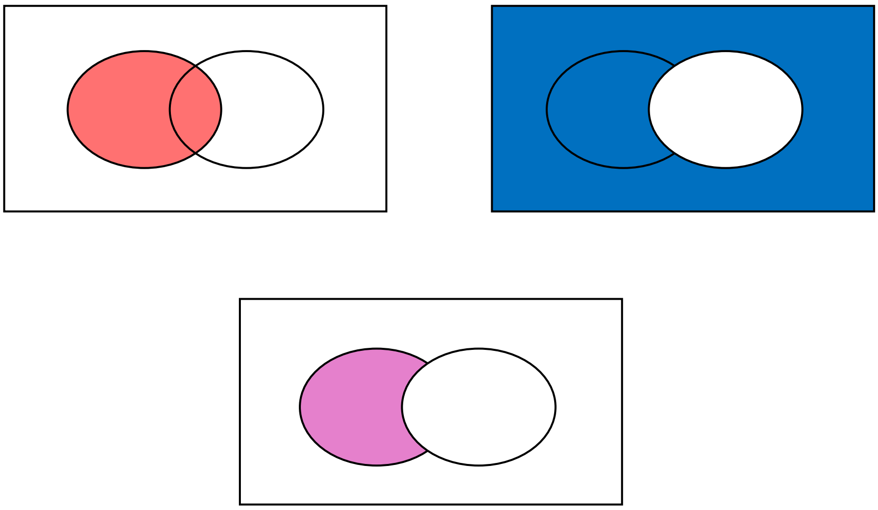
Luego la asíntota es $y = x + 2$.

9. Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral E, donde $\overline{A}$ y $\overline{B}$ denotan los sucesos contrarios. Tenemos asignadas uan probabilidad en E de modo que $P(A \cap B) = {}^{1}/_{9}$ y $P(A \cap \overline{B}) = {}^{2}/_{9}$ entonces calcula el valor de $P(B|A)$:

Solución:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Vamos a calcular $P(A)$.
Conocemos $P(A \cap \overline{B})$. Vamos a representarla:
A está tintada de rojo y $\overline{B}$ de azul, por lo tanto la intersección entre ambas es:



Por lo tanto podemos decir que $P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9}$.

Luego:

$$P(B|A) = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{3}{9}} = \frac{1}{3}$$

10. La integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \boldsymbol{x senx \, dx}$$

Vale:

Solución:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} xsenx\, dx$$

Primero calcularemos al integral por partes:

$$\int xsenx\, dx$$

$$u = x \qquad du = dx$$

$$dv = senx\, dx \qquad v = -cosx$$

$$= x(-\cos x) - \int -\cos x \;\, dx$$

$$= x(-\cos x) - (-sen\, x)$$

$$= -x\cos x + sen\, x$$

Ahora:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} xsenx\, dx = -x\cos x + sen\, x]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}}$$

$$(-\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} + sen\ \frac{\pi}{4}) - (-0\cos 0 + sen0) =$$

$$-\frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

PROBLEMAS

1. **Estudiar la posición relativa de los planos:**

$$\boldsymbol{\pi_1: mx + z = 1}$$
$$\boldsymbol{\pi_2: my - z = 0}$$
$$\boldsymbol{\pi_3: (m+1)x + y + 2z = m + 1}$$

Según los valores de m.

Solución:

Planteo

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & -1 \\ m+1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 1 \\ 0 & m & -1 & 0 \\ m+1 & 1 & 2 & m+1 \end{pmatrix}$$

y calcularemos su posición comparando el rango de ambas.

Para calcular Rg(A) calculo su determinante:

$$|A| = 2m^2 - m(m+1) + m = 2m^2 - m^2 = m^2$$

Así sabemos que $|A| = 0 \Leftrightarrow m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Distingamos casos:

- *Si* $m \neq 0$*: Rg(A)=3=Rg(A*), estamos antes un Sistema Compatible Determinado, los tres planos se cortan en un punto.*

- *Si* $m = 0$*:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Rg(A)=2, ya que: $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

Veamos cuánto vale Rg(A):*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (-1) - 0 - 0 \neq 0$$

Luego Rg(A)=3.*

Estamos ante un Sistema Incompatible, así que estamos ante dos planos paralelos que cortan al tercero.

2. Hallar las asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{e^x - 1}}$$

Hacer un esbozo de la gráfica de f.

Solución.

- *Asíntotas:*
  - *Asíntotas horizontales:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x - 1} =_{L'Hôpital} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x - 1} =_{L'Hôpital} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = \infty$$

  - *Asíntotas verticales:*

Nos planteamos las asíntotas verticales cuando el denominador se anula, es decir:

$$e^x - 1 = 0;\ e^x = 1; x = 0.$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} =_{L'Hôpital} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = 1$$

Luego no hay asíntotas verticales.

  - *Asíntotas oblicuas:*

    Dado que solamente hay asíntota horizontal cuando $x \to \infty$, estudiaremos la existencia de asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{(e^x - 1)x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x - 1} = -1$$
$$n = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x - 1} - mx = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x - 1} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1} = \frac{0}{-1} = 0$$

    Luego hay asíntota oblícua en y=-x.

- *Crecimiento y decrecimiento:*

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 + xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

La derivada $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 + xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$