PROBLEMA RESUELTO 1

Una persona lanza un objeto desde el suelo verticalmente hacia arriba con velocidad inicial de 20 m/s. Calcula:

a) La altura máxima alcanzada.

b) El tiempo que tarda en caer al suelo desde el instante del lanzamiento.

c) La distancia recorrida en el primer segundo de su movimiento.

Planteamiento y resolución

El problema trata un MRUA. La dirección del movimiento es vertical, y el sentido positivo del sistema de referencia, hacia arriba. La aceleración del móvil es la de la gravedad, *g*, y, por tanto, de sentido negativo.

a) El objeto comienza su movimiento ascendiendo hasta que para, velocidad nula, y comienza caer. El tiempo que tarda el objeto en alcanzar la altura máxima es el tiempo que pasa hasta que el objeto para, $v_1 = 0$ m/s:

$$v_1 = v_0 - g \cdot t_1 \rightarrow 0 = 20 - 9{,}8 \cdot t_1 \rightarrow t_1 = 2{,}04 \text{ s}$$

Y la altura máxima alcanzada es:

$$y_1 = y_0 + v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \rightarrow y_1 = 0 + 20 \text{ m/s} \cdot 2{,}04 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 2{,}04^2 \text{ s}^2 = 20{,}4 \text{ m}$$

b) El objeto tarda el mismo tiempo en subir que en bajar. Por tanto, el momento en que el objeto cae al suelo corresponde a: $t_2 = 2 \cdot 2{,}04 \text{ s} = 4{,}08$ s.

En efecto, las soluciones de la ecuación:

$$y_2 = y_0 + v_0 \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 \rightarrow 0 = 0 + 20 \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot t_2^3$$

Son 0 segundos, el momento del lanzamiento, y $t_2 = 4{,}08$ s, el momento de la caída.

c) La distancia, *d*, que recorre durante el primer segundo del lanzamiento es:

$$d = y - y_0 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow d = 20 \text{ m/s} \cdot 1 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 1^2 \text{ s}^2 = 15{,}1 \text{ m}$$

ACTIVIDADES

1 **Un coche acelera al ponerse el semáforo en verde. Después de recorrer 100 m, su velocidad es de 70 km/h. Calcula:**

a) La aceleración del movimiento.

b) La velocidad a 50 m del semáforo.

Sol.: a) 1,89 m/s^2; b) 13,75 m/s (49,49 km/h).

2 **Un niño deja caer una pelota desde su ventana situada a 15 m del suelo.**

a) ¿Cuánto tarda en llegar al suelo?

b) ¿Con qué velocidad llega al suelo?

Sol.: a) 1,75 s; b) 17,15 m/s.

3 **Un coche que circula por una carretera a 80 km/h frena al ver un obstáculo situado a 50 m. ¿Cuál debe ser la deceleración para que el coche no choque con el obstáculo?**

Sol.: Mayor que 4,94 m/s^2.

4 **Desde un punto situado a 5 m de altura se ha lanzado un objeto hacia arriba. Sabiendo que ha tardado 6 s en llegar al suelo, calcula:**

a) La velocidad con la que fue lanzado.

b) La altura máxima alcanzada.

Sol.: a) 28,57 m/s; b) 41,64 m.

5 **Un ciclista necesita 10 s para pasar de 0 a 60 km/h. Calcula:**

a) La aceleración obtenida.

b) La distancia recorrida.

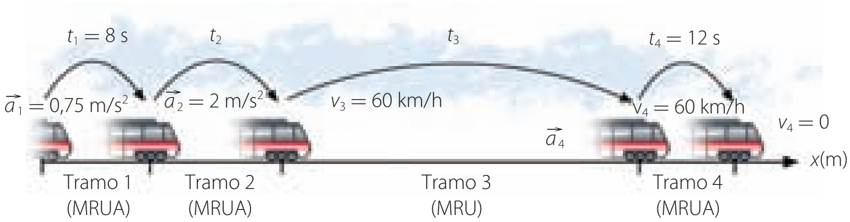
c) La velocidad a los 8 s de comenzar a moverse.

Sol.: a) 1,67 m/s^2;
b) 83,33 m;
c) 13,33 m/s (48 km/h).

5 **Un tren de cercanías sale de una estación, acelera con $a = \text{cte.} = 0{,}75\ \text{m/s}^2$ durante 8 s y luego con $a = \text{cte.} = 2\ \text{m/s}^2$ hasta alcanzar una velocidad constante de 60 km/h. Mantiene la misma velocidad hasta acercarse a la siguiente estación. En ese momento frena uniformemente hasta pararse en 12 s. El tiempo total del trayecto fue de 80 s. ¿Qué distancia hay entre las dos estaciones? Representa la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo.**

SOLUCIÓN

1. Dibuja un sistema de referencia indicando el tipo de movimiento en cada tramo y escribiendo sobre cada uno de ellos los datos del problema.



2. Indica ahora la posición x del tren al final de cada tramo. (La que tenga al final del último tramo será la respuesta a la pregunta.)

- Tramo 1 (MRUA):

$$x_1 = x_{01} + v_{01}t_1 + \frac{1}{2}a_1t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}75\ \text{m/s}^2 \cdot 8^2\ \text{s}^2 = 24\ \text{m}$$

Siendo $x_{01} = 0$, $v_{01} = 0$ m/s (parado), $t_1 = 8$ s y $a_1 = 0{,}75\ \text{m/s}^2$.

- Tramo 2 (MRUA):

$x_{02} = x_1 = 24$ m (la posición inicial en el 2.º tramo es la final en el 1.º).

$v_{02} = v_{f1} = v_{01} + a_1t_1 = 0 + 0{,}75\ \text{m/s}^2 \cdot 8\ \text{s} = 6$ m/s (la velocidad inicial en el 2.º tramo es la final en el 1.º).

$a_2 = 2\ \text{m/s}^2$; $v_{f2} = 60\ \text{km/h} = 16{,}67$ m/s.

$$a_2 = \frac{v_{f2} - v_{02}}{t_2} \rightarrow t_2 = \frac{v_{f2} - v_{02}}{a_2} = \frac{(16{,}67 - 6)\ \text{m/s}}{2\ \text{m/s}^2} = 5{,}34\ \text{s}$$

Por tanto:

$$x_2 = x_{02} + v_{02}t_2 + \frac{1}{2}a_2t_2^2 = 24\ \text{m} + 6\ \text{m/s} \cdot 5{,}34\ \text{s} + \frac{1}{2} \cdot 2\ \text{m/s}^2 \cdot 5{,}34^2\ \text{s}^2 = 84{,}56\ \text{m}$$

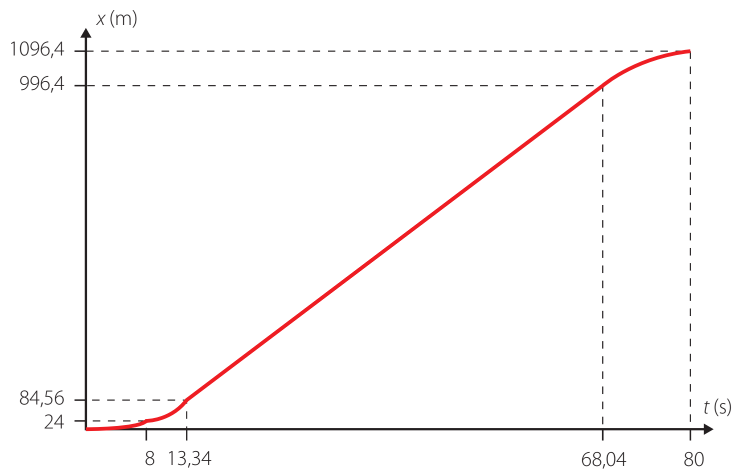
- Tramo 3 (MRU):

$x_{03} = x_2 = 84{,}56$ m;

$v_3 = cte.\ 60\ \text{km/h} = 16{,}67$ m/s

y $t_3 = 80 - t_1 - t_2 - t_4 =$
$= 80\ \text{s} - 8\ \text{s} - 5{,}34\ \text{s} - 12\ \text{s} = 54{,}7$ s.

$$x_3 = x_{03} + v_3t_3 = 84{,}56\ \text{m} + 16{,}67\ \text{m/s} \cdot 54{,}7\ \text{s} = 996{,}4\ \text{m}$$



- Tramo 4 (MRUA):

$x_{04} = x_3 = 996{,}4$ m;

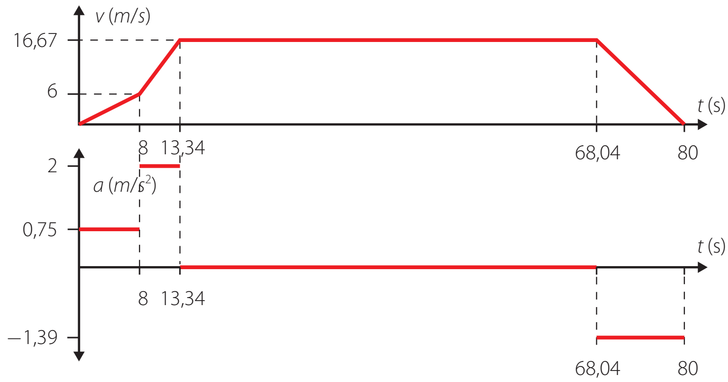
$v_{04} = v_{f3} = 16{,}67$ m/s;

$t_4 = 12$ s; $v_{f4} = 0$ m/s.

$$x_4 = x_{04} + v_{04}t_4 - \frac{1}{2} \cdot a_4t_4^2 = 996{,}4\ \text{m} + 16{,}67\ \text{m/s} \cdot 12\ \text{s} - \frac{1}{2} \cdot 1{,}39\ \text{m/s}^2 \cdot 12^2\ \text{s}^2 = 1096{,}4\ \text{m}$$ hay entre las dos estaciones.

continúa →

3. Representa ahora x-t, v-t, y a-t:
   - Tramo 1 → de $t = 0$ s a $t = 8$ s.
   - Tramo 2 → de $t = 8$ s a $t = 13{,}34$ s.
   - Tramo 3 → de $t = 13{,}34$ s a $t = 68{,}04$ s.
   - Tramo 4 → de $t = 68{,}04$ s a $t = 80$ s.



2. EJERCICIO RESUELTO

Una pareja, que estaba sentada en una terraza de un bar al comienzo de una calle, discute y ella se va, dejando a su novio allí sentado. Cuando llega al final de la calle, se arrepiente y vuelve corriendo para reconciliarse con una a = cte. = 0,5 m/s² justo a la vez que él se levanta y comienza a andar hacia ella con v = cte. = 4 km/h. La calle mide 100 m.

a) ¿Cuánto tiempo tardan en fundirse en un abrazo?

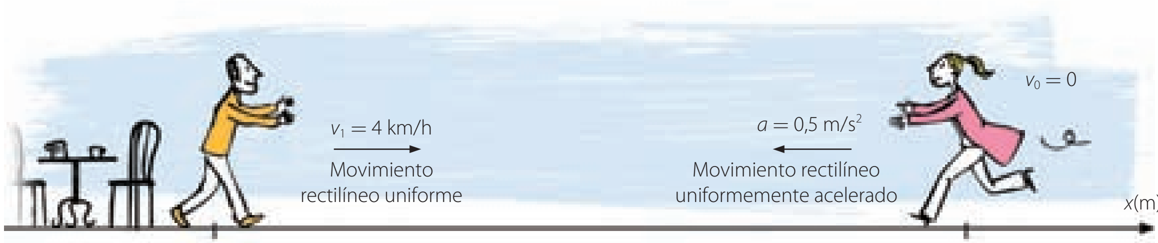
b) ¿A qué distancia de la terraza lo harán?

c) ¿Qué velocidad llevará cada uno justo antes del abrazo?

SOLUCIÓN

Sigamos los siguientes pasos:

1. Dibujamos la situación en el momento que ella da la vuelta y él comienza a andar ($t = 0$) en un sistema de referencia común para ambos.



2. Identificamos el tipo de movimiento de cada uno y escribimos sus ecuaciones de posición y velocidad en función del tiempo.

Teniendo en cuenta que $x_{01} = 0$, $x_{02} = 100$, $v_{02} = 0$ y que $a_2 = 0{,}5$ m/s² es negativa, pues es un vector que va en el mismo sentido que la velocidad (por lo tanto, con el mismo signo que esta, que será negativo, pues la velocidad va en sentido contrario del eje X), tenemos:

Chico → MRU

- $v_1 = 4 \text{ km/h} = 1{,}11 \text{ m/s}$
- $x_1 = x_{01} + v_1 \cdot t_1 = 1{,}11 \cdot t_1$

Chica → MRUA

- $v_2 = v_{02} + a_2 \cdot t_2 = -0{,}5 \cdot t_2$
- $x_2 = x_{02} + v_{02} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_2\, t_2^2 = 100 - 0{,}25 \cdot t_2^2$

¡Ojo! ¡x_2 es la posición (la coordenada) de la chica en cualquier instante de tiempo en nuestro eje X; no el espacio que ha recorrido!

continúa →

2. Identificamos el tipo de movimiento de cada uno y escribimos sus ecuaciones de posición y velocidad en función del tiempo.

Teniendo en cuenta que $x_{01} = 0$, $x_{02} = 100$, $v_{02} = 0$ y que $a_2 = 0{,}5$ m/s^2 es negativa, pues es un vector que va en el mismo sentido que la velocidad (por tanto, con el mismo signo que esta, que será negativo, pues la velocidad va en sentido contrario del eje X), tenemos:

Chico → MRU

- $v_1 = 4$ km/h $= 1{,}11$ m/s
- $x_1 = x_{01} + v_1 \cdot t_1 = 1{,}11 \cdot t_1$

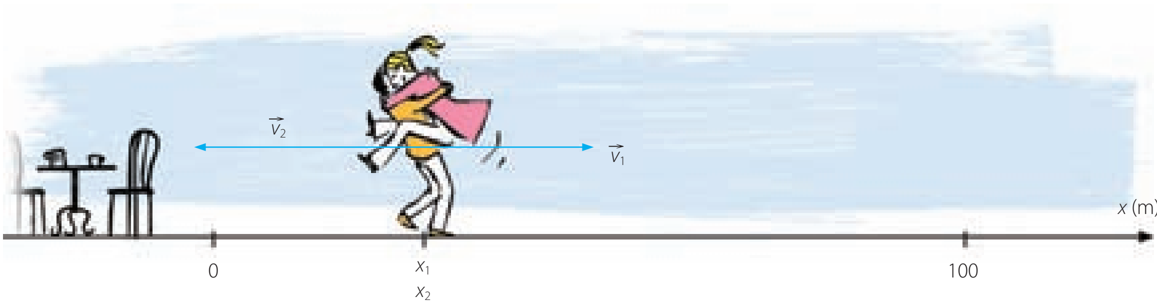
Chica → MRUA

- $v_2 = v_{02} + a_2 \cdot t_2 = -0{,}5 \cdot t_2$
- $x_2 = x_{02} + v_{02} \cdot t + \dfrac{1}{2} \cdot a_2\, t_2^2 = 100 - 0{,}25 \cdot t_2^2$

¡Ojo! ¡x_2 es la posición (la coordenada) de la chica en cualquier instante de tiempo en nuestro eje X; no el espacio que ha recorrido!

3. Ahora, para responder a las preguntas, seguimos la siguiente estrategia:

Dibujamos la situación que nos plantea el enunciado y nos preguntamos qué tienen en común el chico y la chica en esa situación para poder plantear una igualdad: ¿Es la velocidad? ¿Es el tiempo transcurrido? ¿Es la posición?



Tras pensar un poco descubriremos que cuando se encuentran sus velocidades no son iguales, pero sí lo son tanto el tiempo transcurrido como la posición de ambos. Es decir:

$$x_1 = x_2 \quad \text{y} \quad t_1 = t_2$$

4. Resolvemos (pista: es más fácil comenzar con $x_1 = x_2$):

$$x_1 = x_2 \rightarrow 1{,}11 \cdot t_1 = 100 - 0{,}25 \cdot t_2^2 \rightarrow 1{,}11 \cdot t = 100 - 0{,}25 \cdot t^2$$

(Como $t_1 = t_2$, llamamos t a ambos tiempos.) Ordenamos la ecuación:

$$0{,}25 \cdot t^2 + 1{,}11 \cdot t - 100 = 0 \rightarrow t = \frac{-1{,}11 \pm \sqrt{1{,}11^2 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot (-100)}}{2 \cdot 0{,}25} \rightarrow \begin{cases} t_1 = 17{,}9 \text{ s} \\ t_2 = -22{,}3 \text{ s} \end{cases}$$

Como no tiene sentido un tiempo negativo, la única solución válida es:

$t = 17{,}9$ s → es el tiempo que tardan en fundirse en un abrazo

En este instante de tiempo $t = 17{,}9$ s, hallamos la posición de ambos (es la misma para los dos, recuerda que $x_1 = x_2$). Sustituimos en x_1 que en este caso es más fácil:

$x_1 = 1{,}11 \cdot t = 1{,}11 \cdot 17{,}9 = 19{,}9$ m → Posición de ambos y distancia a la que están de la terraza cuando se encuentran.

El chico habrá recorrido un espacio de 19,9 m. Y la chica, de (100 − 19,9) = 80,1 m.

Y en el instante del encuentro cada uno llevará una velocidad de:

- Chico → $v_1 = 4$ km/h $= 1{,}11$ m/s
- Chica → $v_2 = -0{,}5 \cdot t_2 = -0{,}5 \cdot 17{,}9 = -9$ m/s

(El signo menos significa que la chica corre en sentido negativo del eje X.)

6 **En un momento dado el coche de unos ladrones pasa junto a un bar de carretera con una velocidad de 100 km/h. Diez minutos después pasa por el mismo sitio persiguiéndolo un coche de policía con una velocidad de 120 km/h. ¿Qué tiempo tarda en alcanzar el coche de policía al de los ladrones? ¿A qué distancia del bar de carretera estarán en ese momento?**

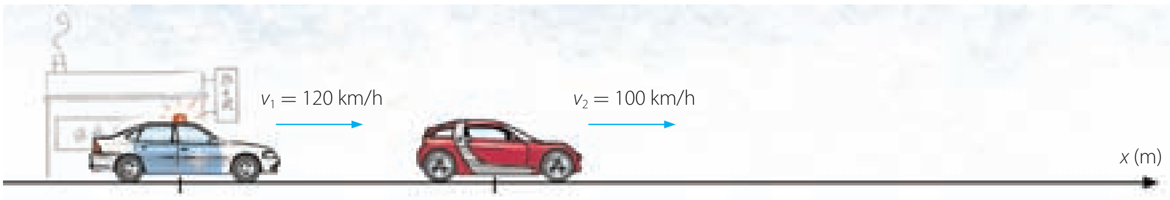
SOLUCIÓN

1. Haz un dibujo de los dos coches sobre un sistema de referencia justo cuando el coche de policía pasa por delante del bar de carretera (sitúa ahí el origen del eje X).

Pista: estás dibujando la situación en $t = 0$; por tanto, x_0 de cada coche es:

- Coche de policía $\rightarrow x_0 = 0$.
- Coche de los ladrones $\rightarrow x_0 =$ espacio que ha recorrido en los 10 minutos que tardó en pasar el coche de policía por el bar de carretera:

$$10\ \cancel{\text{min}} \cdot \frac{100\ \text{km}}{60\ \cancel{\text{min}}} = 16{,}67\ \text{km} = 16\,670\ \text{m}$$



2. Identifica el tipo de movimiento de cada uno y escribe sus ecuaciones de posición y velocidad en función del tiempo (expresa los espacios en metros y las velocidades en m/s.

Coche de policía	Coche de los ladrones
MRU	**MRU**
$v_1 = 120$ km/h $= 33{,}33$ m/s	$v_2 = 100$ km/h $= 27{,}78$ m/s
$x_1 = x_{01} + v_1 \cdot t_1 = 33{,}33 \cdot t_1$	$x_2 = x_{02} + v_2 \cdot t_2 = 16\,670 + 27{,}78 \cdot t_2$

3. Establece las igualdades que se produzcan en el momento de la captura.

$$x_1 = x_2 \quad \text{y} \quad t_1 = t_2$$

4. Resuelve esas ecuaciones y averigua cuánto tiempo tarda el coche de policía en alcanzar al de los ladrones.

Es más fácil comenzar con $x_1 = x_2$.

$$x_1 = x_2 \rightarrow 33{,}33 \cdot t_1 = 16\,670 + 27{,}78 \cdot t_2 \rightarrow 33{,}33 \cdot t = 16\,670 + 27{,}78 \cdot t$$

(Como $t_1 = t_2$, llamamos t a ambos tiempos.) Despejamos t:

$$(33{,}33 - 27{,}78) \cdot t = 16\,670 \rightarrow t = \frac{16\,670\ \text{m}}{33{,}33\ \text{m/s} - 27{,}78\ \text{m/s}} = 3004\ \text{s}$$

Es el tiempo que tarda en alcanzar el coche de policía al de los ladrones.

5. Con el tiempo anterior, halla a qué distancia del bar de carretera se produce la captura.

Como transcurrido el tiempo calculado en el apartado anterior la posición de ambos coches es la misma (recuerda: $x_1 = x_2$), para hallar la distancia al bar de carretera puedes sustituir ese tiempo en cualquiera de las dos ecuaciones: x_1 o x_2. Sustituimos, por ejemplo, en x_1, que es más sencilla:

$x_1 = 33{,}33 \cdot t_1 = 33{,}33 \cdot 3\,004 = 100\,123$ m $\rightarrow$ Distancia al bar de carretera cuando el coche de policía alcanzó al de los ladrones.

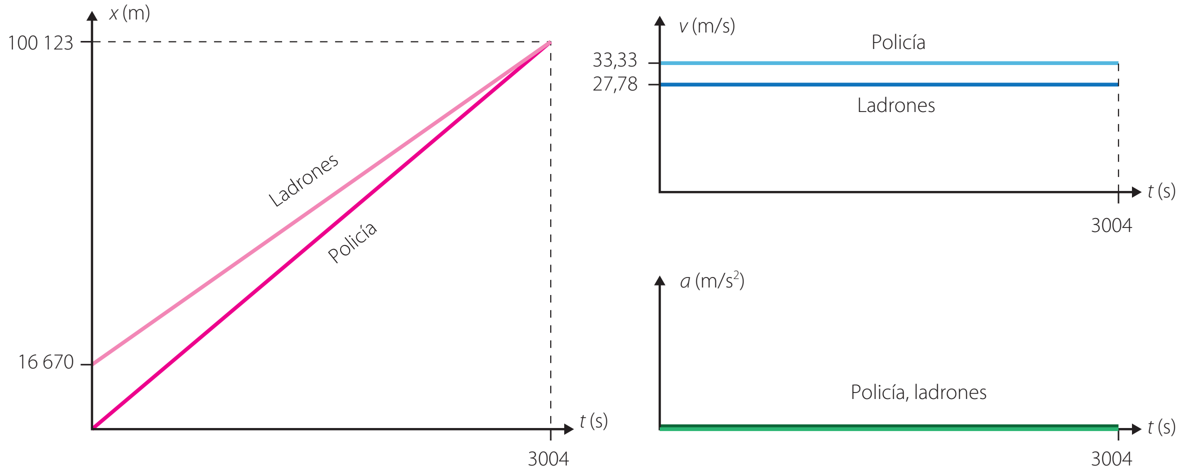
Comprobamos que daría lo mismo si hubiéramos sustituido en la ecuación de x_2:

$$x_2 = 16\,670\ \text{m} + 27{,}78\ \text{m/s} \cdot t = 16\,670\ \text{m} + 27{,}78\ \text{m/s} \cdot 3004\ \text{s} = 100\,121\ \text{m} \approx 100\,123\ \text{m}$$

(La pequeña diferencia es por los redondeos de decimales que hemos hecho en cada operación.)

continúa →

6. Representa la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo de los dos coches (en la misma gráfica los dos).



7 **En un duelo medieval en una película dos caballeros con sus caballos, sus armaduras y sus espadas, separados entre sí 100 m, parten del reposo y salen uno al encuentro del otro para luchar. Los dos se mueven con una aceleración constante: el primero, de 2 m/s², y el segundo, de 3 m/s².**

a) ¿A qué distancia de donde salió el primero se enzarzarán en la batalla?

b) ¿Cuánto tiempo habrán tardado en alcanzarse?

c) ¿Qué velocidad llevaba cada uno cuando se encontraron los dos actores que hacen el papel de caballeros?

SOLUCIÓN

1. Haz un dibujo en el mismo sistema de referencia justo en el instante en que comienzan a correr ($t = 0$).

2. Indica el tipo de movimiento de cada uno y escribe sus ecuaciones de posición y velocidad en función del tiempo.

(Pista: no olvides que, si corren en sentidos contrarios, las velocidades son de distinto signo, y que la aceleración tiene el mismo signo que la velocidad cuando tiene el mismo sentido y signo contrario cuando tiene sentido contrario.)

- Caballero 1 (MRUA):

$$v_1 = v_{01} + a_1 \cdot t_1 = 2t_1$$

$$x_1 = x_{01} + v_{01} \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot a_1 t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2t_1^2 = t_1^2$$

- Caballero 2 (MRUA):

$$v_2 = v_{02} - a_2 \cdot t_2 = -3t_1$$

$$x_2 = x_{02} + v_{02} \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot a_2 t_2^2 = x_{02} - \frac{1}{2} \cdot 3t_1^2 = 100 - 1{,}5t_2^2$$

($v_{01} = v_{02} = 0$ porque inicialmente estaban parados.)

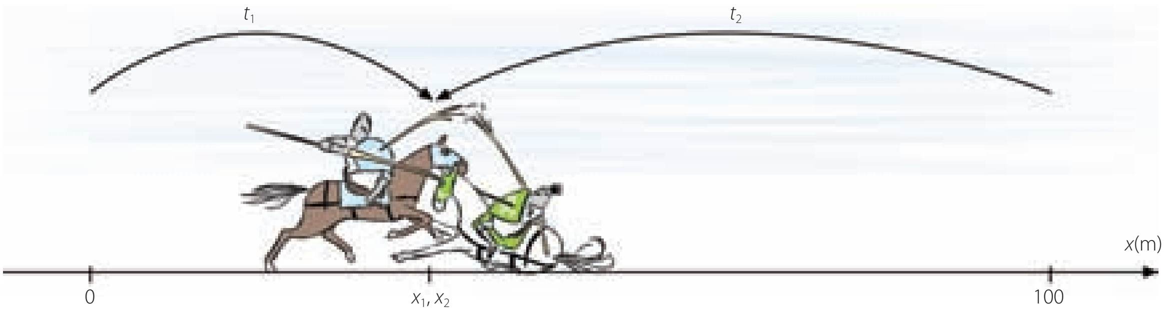
continúa →

3. Dibuja el momento de su encuentro. ¿Ocurre más cerca de donde partió el caballero 1 o de donde partió el caballero 2?

Escribe las igualdades que se produzcan en ese momento.

El encuentro ocurre más cerca de donde partió el caballero 1, pues su aceleración es menor. En ese momento se cumple que:

$$x_1 = x_2 \quad \text{y} \quad t_1 = t_2$$



4. Resuelve las ecuaciones del paso anterior.

Empezamos con $x_1 = x_2$ que es más fácil:

$$x_1 = x_2 \rightarrow t_1^2 = 100 - 1{,}5t_2^2 \rightarrow t^2 = 100 - 1{,}5t^2 \rightarrow 2{,}5t^2 = 100 \rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{100}{2{,}5}} = \sqrt{40} = +6{,}3 \text{ s}$$

(Como $t_1 = t_2$, llamamos t a ambos tiempos.)

6,3 s es el tiempo que tardan en encontrarse (despreciamos la solución negativa).

Este es el tiempo que tardan en alcanzarse.

5. Con el tiempo anterior, halla la posición que tenían cuando se enzarzaron.

Podemos usar indistintamente la ecuación de x_1 o de x_2, puesto que $x_1 = x_2$:

$$x_1 = t_1^2 = \left(\sqrt{40}\right)^2 = 40 \text{ m}$$

Comprobemos que daría igual en la otra ecuación:

$$x_2 = 100 - 1{,}5t_2^2 = 100 - 1{,}5 \cdot \left(\sqrt{40}\right)^2 = 100 - 60 = 40 \text{ m}$$

¿Cuánto espacio ha recorrido cada uno?

- El caballero 1 ha recorrido 40 m.
- El caballero 2 ha recorrido:

$$(100 - 40) \text{ m} = 60 \text{ m}$$

Reflexiona sobre la diferencia entre posición y espacio recorrido.

La posición de ambos, es decir, el lugar donde se encuentran, es el mismo, pero el espacio que han recorrido hasta llegar a esa posición es diferente para cada uno.
Nuestras ecuaciones de x_1 y x_2 nos indican la posición de cada caballero a medida que pasa el tiempo, que no siempre es lo mismo que el espacio que recorren.

6. Con el tiempo del apartado 4 halla la velocidad que tenía cada uno cuando se enzarzaron.

- Caballero 1:

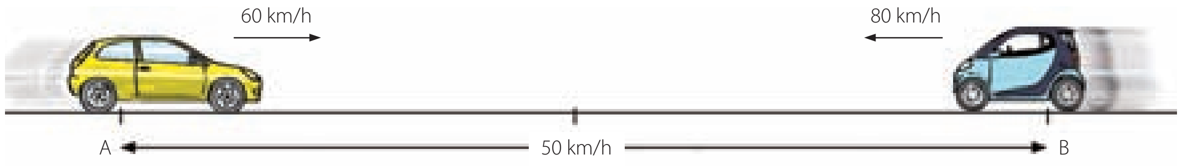
$$v_1 = 2 \cdot t_1 = 2 \cdot 6{,}3 \text{ s} = 12{,}6 \text{ m/s}$$

- Caballero 2:

$$v_2 = -3t_1 = -3 \cdot 6{,}3 \text{ s} = -18{,}9 \text{ m/s}$$

(El signo menos indica que el caballero 2 se mueve en sentido negativo del eje X.)

8 **Dos coches que circulan en sentidos contrarios con velocidades constantes de 60 y 80 km por hora, respectivamente, se encuentran separados 50 km cuando el reloj marca la una en punto. Calcula a qué hora se cruzarán.**



SOLUCIÓN

El origen del sistema de referencia se fija en el punto de partida del primer coche, y se toma como sentido positivo el de avance del primer coche también. Utilizando este sistema de referencia las posiciones de partida de los dos coches son $x_{A0} = 0$ km y $x_{B0} = 50$ km, y las velocidades son $v_A = 60$ km/h y $v_B = 80$ km/h. Como los movimientos de ambos coches son rectilíneos y uniformes, las posiciones en función del tiempo son:

$$x(t) = x_0 + v \cdot t \rightarrow \begin{cases} x_A(t) = 60t \\ x_B(t) = 50 - 80t \end{cases}$$

Imponiendo que las posiciones en el instante que se cruzan sean iguales:

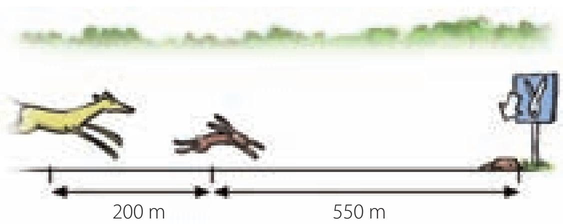
$$x_A(t) = x_B(t) \rightarrow 60t = 50 - 80t \rightarrow t = \frac{50 \text{ km}}{140 \text{ km/h}} = 0{,}357 \text{ h}$$

Es decir, 21 min 25 s. Por tanto, se cruzarán a las 13 h 21 min 25 s.

3. EJERCICIO RESUELTO

Una liebre corre hacia su madriguera perseguida por un galgo que trata de alcanzarla. El galgo corre a 40 km/h, mientras que la liebre lo hace a 30 km/h. Sabiendo que la distancia inicial que los separa es de 200 m y que de la posición inicial de la liebre a la madriguera hay 550 m, calcula si la liebre conseguirá llegar a su madriguera antes de que el galgo la alcance.

SOLUCIÓN



Las velocidades de la liebre y el galgo en el SI de unidades son, respectivamente, 8,33 m/s y 11,11 m/s. Situando el origen del sistema de referencia en la posición inicial del galgo, tomando como sentido positivo el del movimiento de ambos animales, las ecuaciones de la posición para cada animal son:

$$x_{liebre}(t) = 200 + 8{,}33 \cdot t$$
$$x_{galgo}(t) = 11{,}11 \cdot t$$

En el momento en que el galgo alcance a la liebre sus posiciones serán iguales, por lo que:

$$200 + 8{,}33 \cdot t = 11{,}11t \rightarrow t = \frac{200}{2{,}78} = 71{,}94 \text{ s}$$

Y la posición en ese instante será:

$$x_{galgo}(t = 71{,}94 \text{ s}) = 11{,}11 \text{ m/s} \cdot 71{,}94 \text{ s} = 799{,}25 \text{ m}$$

La liebre, por tanto, se salvará, porque su madriguera está situada a 750 m de la posición inicial del galgo y este necesita mayor distancia para alcanzarla.

12 **María está asomada a la ventana de su casa a 15 m de altura.**

SOLUCIÓN

a) ¿Con qué velocidad debe lanzar Inés, situada justo debajo de la ventana, un estuche desde el suelo para que llegue justo hasta la posición de María?

El problema trata un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. La dirección del movimiento es vertical, y el sentido positivo del sistema de referencia, hacia arriba. La aceleración del móvil es la de la gravedad, g, y, por tanto, de sentido negativo.

La velocidad debe ser nula a 15 m de altura. Así pues, utilizamos la expresión:

$$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot g \cdot y$$

Y sustituimos los valores para v, y, g. Debemos recordar que la aceleración tiene sentido contrario al movimiento:

$$0^2 = v_0^2 - 2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 15 \text{ m}$$

De las dos posibles soluciones descartamos la negativa, porque indicaría que el objeto se lanza hacia abajo, que es el sentido negativo en nuestro sistema de referencia. Despejando v_0:

$$v_0 = 17{,}15 \text{ m/s}$$

b) ¿Cuánto tiempo habrá tardado el estuche en recorrer los últimos 5 m de subida?

A los 10 m de altura el estuche llevaba una velocidad:

$$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot g \cdot y$$

De nuevo la aceleración tiene sentido negativo:

$$v^2 = 17{,}15^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 - 2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 10 \text{ m}$$

De las dos posibles soluciones descartamos la negativa porque indicaría velocidad hacia abajo, y no corresponde a esta situación:

$$v = 9{,}91 \text{ m/s}$$

Por tanto, el tiempo transcurrido de los 10 m a los 15 m ha sido:

$$v = v_0 - g \cdot t \rightarrow 0 = 9{,}91 - 9{,}8 \cdot t \rightarrow t = 1{,}01 \text{ s}$$

c) ¿Con qué velocidad debe lanzar María hacia abajo una pelota, en el mismo instante en que Inés lanza el estuche, para que el choque entre ambos objetos se produzca a 5 m de altura?

Calculamos el tiempo que tarda el estuche en recorrer los primeros 5 m:

$$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot a \cdot y \rightarrow v^2 = 17{,}15^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 - 2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 5 \text{ m} \rightarrow v = 14 \text{ m/s}$$

Por lo que el tiempo tardado en recorrer los primeros 5 m ha sido:

$$v = v_0 - g \cdot t \rightarrow 14 \text{ m/s} = 17{,}15 \text{ m/s} - 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot t \rightarrow t = 0{,}32 \text{ s}$$

Ese mismo tiempo debe tardar la pelota en bajar 10 m, por lo que utilizamos:

$$y = y_0 - v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Ahora la velocidad y la aceleración son negativas porque ambas están orientadas hacia abajo:

$$5 \text{ m} = 15 \text{ m} - v_0 \cdot 0{,}32 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}32^2 \text{ s}^2$$

El resultado es:

$$v_0 = 29{,}68 \text{ m/s}$$

13 **Un ciclista se pone en movimiento con una aceleración de 2 m/s² que mantiene durante 18 s. Pasado este tiempo mantiene la velocidad constante durante 500 m y finalmente frena deteniéndose 1000 m más allá del punto en que comenzó a moverse. Calcula la aceleración de cada tramo y el tiempo total empleado en la carrera.**

SOLUCIÓN

El movimiento del ciclista varía en los tres tramos que recorre.

Inicialmente el ciclista avanza con un MRUA, donde velocidad y aceleración tienen igual sentido. Se toma como origen del sistema de referencia el origen del movimiento, y sentido positivo el de avance del ciclista. Entonces durante los primeros 18 s el ciclista recorre una distancia:

$$x - x_0 = + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow x - 0 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ m/s}^2 \cdot 18^2 \text{ s}^2 = 324 \text{ m}$$

Y termina este tramo con una velocidad:

$$v = v_0 + a \cdot t \rightarrow v = 0 + 2 \text{ m/s}^2 \cdot 18 \text{ s} = 36 \text{ m/s}$$

En el segundo tramo la velocidad permanece constante y el movimiento es rectilíneo y uniforme. El tiempo empleado en este tramo es:

$$t = \frac{500 \text{ m}}{36 \text{ m/s}} = 13{,}89 \text{ s}$$

El tercer tramo, en el que frena, corresponde a un movimiento uniformemente decelerado; es decir, con aceleración en sentido contrario al de avance. La distancia recorrida es:

$$1000 \text{ m} - (324 + 500) \text{ m} = 176 \text{ m}$$

Y la aceleración en este tramo la calculamos utilizando:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot x \rightarrow 0^2 = 36^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 + 2 \cdot a \cdot 176 \text{ m} \rightarrow a = -3{,}68 \text{ m/s}^2$$

El tiempo empleado en este tramo lo calculamos usando:

$$v = v_0 + a \cdot t \rightarrow 0 = 36 \text{ m/s} - 3{,}68 \text{ m/s}^2 \cdot t \rightarrow t = 9{,}78 \text{ s}$$

El tiempo total empleado es la suma del utilizado en cada tramo:

$$18 \text{ s} + 13{,}89 \text{ s} + 9{,}78 \text{ s} = 41{,}67 \text{ s}$$

14 **Desde la punta de un trampolín que está a 3 m sobre el agua Alba se impulsa verticalmente hacia arriba con una velocidad de 2 m/s. Calcula la velocidad con que Alba entrará en el agua.**

SOLUCIÓN

El movimiento del problema es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Si el sistema de referencia tiene el origen en la superficie del agua, y dirección y sentido, vertical y hacia arriba, la posición inicial de Alba es $y_0 = 3$ m; la velocidad inicial, $v_0 = 2$ m/s, tiene sentido positivo y la aceleración de la gravedad tiene sentido negativo:

$$y = y_0 + v_{0.} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow 0 = 3 \text{ m} + 2 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot t^2 \rightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-4{,}9) \cdot 3}}{2 \cdot (-4{,}9)}$$

La solución negativa se descarta. El tiempo que tarda en llegar al agua es $t = 1{,}01$ s.

La velocidad de llegada se halla utilizando el tiempo previamente calculado:

$$v = v_0 - g \cdot t = 2 - 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 1{,}01 \text{ s} = -7{,}9 \text{ m/s}$$

El signo de la velocidad es negativo porque el vector velocidad tiene sentido negativo en el sistema de referencia considerado.

4. EJERCICIO RESUELTO

Andrea se deja caer desde el punto más alto de la torre Eiffel a 320 m de altura. Cuando pasa por un punto situado a 200 m de altura abre su paracaídas y a partir de ese momento baja con velocidad constante. Calcula el tiempo total que dura la caída hasta el suelo.

SOLUCIÓN

El movimiento rectilíneo de Andrea está compuesto de un tramo uniformemente acelerado partiendo del reposo y otro segundo tramo de movimiento uniforme.

El sistema de referencia se fija en el punto más alto de la torre Eiffel con sentido positivo hacia abajo, de manera que Andrea parte de la posición $y_0 = 0$ m, abre el paracaídas en $y_1 = 120$ m y llega a la base de la torre Eiffel en la posición $y_2 = 320$ m.

En este sistema de referencia la velocidad es positiva, y la aceleración de la gravedad, también.

Calculamos el tiempo que Andrea se mueve en caída libre bajo la aceleración de la gravedad de la siguiente manera:

$$y_1 = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow 120 \text{ m} = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot t^2 \rightarrow t = 4{,}95 \text{ s}$$

Ahora podemos calcular la velocidad al final del primer tramo:

$$v_1 = v_0 + a \cdot t \rightarrow v_1 = 0 + 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 4{,}95 \text{ s} = 48{,}51 \text{ m/s}$$

Que corresponde a la velocidad constante v_1 con la que Andrea baja durante el segundo tramo.

El tiempo que tarda Andrea en recorrer los 200 m que le faltan para llegar al suelo con movimiento uniforme es:

$$v_1 = \frac{y_2 - y_1}{t} \rightarrow t = \frac{320 \text{ m} - 120 \text{ m}}{48{,}51 \text{ m/s}} = 4{,}12 \text{ s}$$

El tiempo total empleado en la caída es:

$$4{,}95 \text{ s} + 4{,}12 \text{ s} = 9{,}07 \text{ s}$$

15 **En la salida de una curva en un Gran Premio de Fórmula 1, Fernando Alonso pisa el acelerador a fondo para pasar de 50 km/h a su velocidad máxima en la recta de meta. Sin embargo, justo en el momento de alcanzar la velocidad de 300 km/h, el coche que va delante sufre un accidente y Fernando se ve obligado a frenar hasta quedar parado a 500 m de la salida de la curva. Si la fase de aceleración duró 8 s, ¿qué distancia necesitó para frenar?**

SOLUCIÓN

Fernando Alonso mantiene un movimiento uniformemente acelerado durante 8 s y, después, otro uniformemente decelerado. Las velocidades del enunciado en el SI son:

$$v_1 = \frac{50 \cancel{\text{km}}}{1 \cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}} = 13{,}89 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{300 \cancel{\text{km}}}{1 \cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}} = 83{,}33 \text{ m/s}$$

Considerando como sentido positivo el de avance de Alonso, la aceleración en el primer tramo, que tiene el sentido del movimiento, debe ser positiva:

$$v = v_0 + a \cdot t \rightarrow 83{,}33 \text{ m/s} = 13{,}89 \text{ m/s} + a \cdot 8 \text{ s} \rightarrow a = 8{,}68 \text{ m/s}^2$$

continúa →

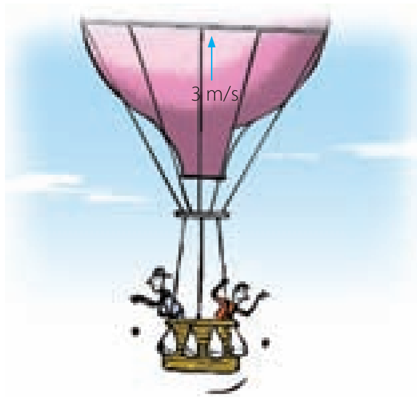
Ahora podemos calcular la distancia que recorrió mientras aceleraba:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow x = 0 \text{ m} + 13{,}89 \text{ m/s} \cdot 8 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 8{,}68 \text{ m/s}^2 \cdot 8^2 \text{ s}^2 = 388{,}88 \text{ m}$$

La distancia que utilizó en la frenada es la distancia recorrida en total menos la que recorrió acelerando:

$$500 \text{ m} - 388{,}88 \text{ m} = 111{,}12 \text{ m}$$

16 **Tomás y Paco están en un globo que asciende a 3 m/s. Cuando la altitud es de 50 m, Tomás deja caer una piedra. Calcula:**



SOLUCIÓN

a) El tiempo que tarda la piedra en llegar al suelo.

El problema trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. La dirección del movimiento es vertical, y el sentido positivo del sistema de referencia, hacia arriba. La aceleración del móvil es la de la gravedad, *g*, y, por tanto, de sentido negativo.

La velocidad inicial con que parte la piedra del globo coincide con la velocidad de ascensión del globo, y es de 3 m/s y positiva. Por tanto, la piedra ascenderá un poco antes de parar y volverá a caer pasando de nuevo por el punto en que fue lanzada. Desde el globo, Tomás y Paco verán la piedra alejarse desde el primer momento.

El tiempo que tarda la piedra en llegar al suelo es:

$$y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow 0 = 50 \text{ m} + 3 \text{ m/s} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot t^2$$

Que es una ecuación de segundo grado para *t*.

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-4{,}9) \cdot 50}}{2 \cdot (-4{,}9)} \rightarrow t = \frac{-3 \pm 31{,}45}{-9{,}8}$$

Descartamos la solución negativa. El tiempo que tarda la piedra en caer es:

$$t = 3{,}51 \text{ s}$$

b) La velocidad a la que tendrá que lanzar Paco una segunda piedra 2 s después de que Tomás suelte la suya para que ambas lleguen al suelo simultáneamente.

Como Paco lanza la piedra 2 s después que Tomás, para que lleguen a la vez al suelo tiene que tardar 2 s menos que la piedra de Tomas, $t = 1{,}51$ s. Además, puesto que el globo sube con velocidad uniforme de 3 m/s, la piedra de Paco se lanza desde una altura añadida de 6 m (distancia que se eleva el globo durante los dos segundos). Por tanto:

$$y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow 0 = 56 \text{ m} + v_0 \cdot 1{,}51 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 1{,}51^2 \text{ s}^2 \rightarrow v_0 = -29{,}68 \text{ m/s}$$

Efectivamente, la velocidad sale negativa, porque Paco debe lanzar su piedra hacia abajo.