MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 1. Álxebra.

A=$\begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ C=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Determine para que valores de m existe a matriz inversa de A.

A matriz A ten inversa se determinante de A distinto de cero

Det(A)=2m≠0 ⇒m≠0

Existe inversa da matriz A para todo m≠0

b) Despexe a matriz X tal que X·A+B= C e calcúlea para m=1.

$X\cdot A+B= C \Rightarrow X\cdot A= C-B \Rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}=(C-B)\cdot A^{-1}$

$\mathbf{X=(C-B)\cdot A^{-1}}$

C-B=$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(A^*)^t$; $\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$

$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 2 \end{pmatrix}$; $(A^*)^t = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{X=(C-B)\cdot A^{-1}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

$\mathbf{X=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}}$

(Podese calcular a matriz inversa de A utilizando Gauss)

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 2. Álxebra.

Consideramos o seguinte sistema de inecuacións:

$y \leq x+2$ $\quad x+y \leq 6$ $\quad x \leq 5$ $\quad y \geq 0$

a) Represente graficamente a rexión factible e calcule os seus vértices.

b) Determine o punto ou puntos desa rexión onde a función $f(x,y) = x - y$ alcanza os seus valores máximo e mínimo. **c)** Determine eses valores máximo e mínimo.

a) **Inecuacións**:

$y \leq x+2$ $\quad x+y \leq 6$ $\quad x \leq 5$ $\quad y \geq 0$

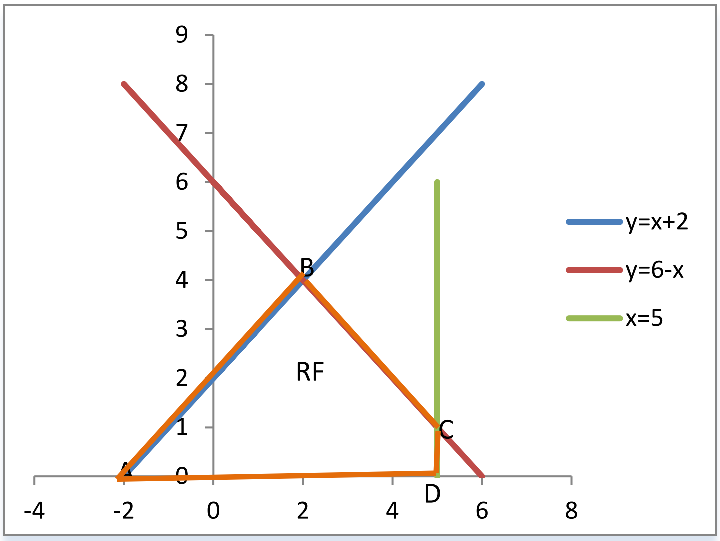
Vértices

A: $\left.\begin{array}{l} y=0 \\ y=x+2 \end{array}\right\} A(-2,0)$

B: $\left.\begin{array}{l} y=x+2 \\ x+y=6 \end{array}\right\} B(2,4)$

C: $\left.\begin{array}{l} x=5 \\ x+y=6 \end{array}\right\} C(5,1)$

D: $\left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=0 \end{array}\right\} D(5,0)$



b) **f(x, y) = x-y**

Avaliamos a función **f(x, y)** nos vértices

f(A) =f (-2, 0)= **-2**

f(B) = f (2, 4)= **-2**

f(C) = f (5,1) = 4

f(D) = f (5, 0) **=5**

A función **f(x,y)** alcanza un **mínimo** en tódolos puntos do **segmento que une os vértices A(-2,0) e B(2,4)** e alcanza un **máximo no vértice D(5,0).**

c) Min f(x,y)=f(-2,0)=**-2**

Máx f(x,y)=f(5,0)=**5**

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 3. Análise.

A cantidade de CO_2 (en millóns de toneladas) emitida á atmosfera por unha determinada rexión ó longo do ano 2020, vén dada pola función

$$C(t) = \begin{cases} 5 - \frac{t}{3} & , \quad 0 \leq t < 6 \\ \frac{1}{4}t^2 - 4t + 18 & , \quad 6 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

sendo t é o tempo transcorrido en meses desde comezo do ano.

a) Estudie en que períodos se produciu un aumento/diminución da cantidade de CO_2 emitida á atmosfera.

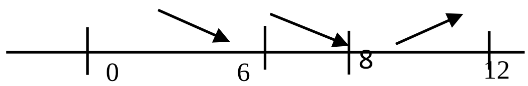
Estudiamos a monotonía da función C(t)

- En (0,6): C(t)= $5 - \frac{t}{3}$

C´(t)= $-\frac{1}{3}$<0 ⇒**C decrecente no intervalo (0,6)**

- En (6,12):C(t)= $\frac{1}{4}t^2 - 4t + 18$

C´(t)= $\frac{1}{2}t$ −4; C´(t)=0⇒ $t = 8(punto\ crítico)$



En (6,8) C´(t)<0 ⇒**C decrecente no intervalo (6,8)**

En (8,12) C´(t)>0 ⇒ **C crecente no intervalo (8,12)**

t=8 mínimo relativo, C(8)=2 ⇒ Min(8,2)

C(0)=5; C(6^-)=3; C(6)=3; C(12)=**6 máximo valor de C(t) en [0, 12]**

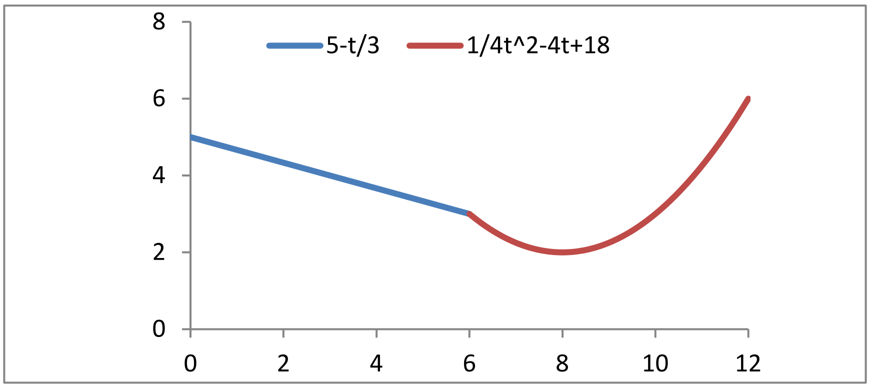
A cantidade de CO_2 emitida a atmosfera diminúe desde o momento inicial ata transcorridos 8 meses e diminúe desde ese instante ata finalizar o ano(mes 12)

b) Cales son as cantidades máxima e mínima de CO_2 emitidas á atmosfera ó longo do ano 2020? En que momentos se produciron?

A **cantidade máxima** de CO_2 emitida e de **6 millóns de toneladas** que se producen **o finalizar o ano (mes 12)**

A **cantidade mínima** de CO_2 emitida e de **2 millóns de toneladas** que se producen **transcorridos 8 meses.**

c) Represente a gráfica da función $C(t)$ tendo en conta o estudo realizado nos apartados anteriores.



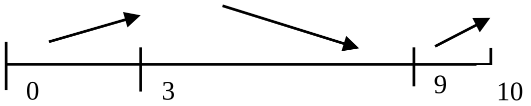
MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 4. Análise. Un fabricante de automóbiles fai un estudo sobre os beneficios, en miles de euros, ao longo dos dez últimos anos, e comproba que estes se axustan á función
B(t) $=t^3-18t^2+81t-3$ se $0\leq t\leq 10$, (t en anos)
a) Que beneficios obtivo a empresa o último ano do estudo?

B(10) $=10^3-18\times 10^2+81\times 10-3=7$
O último ano (t=10) obtivo 7000€ de beneficios.

b) Determine os períodos de crecemento e decrecemento dos beneficios.
B´(t)= $3t^2-36t+81$; B´(t)=0 $\Rightarrow 3t^2-36t+81=0\Rightarrow t^2-12t+27=0$

t=$\frac{12\pm\sqrt{144-108}}{2}$ ⇒t=$\frac{12\pm 6}{2}=\begin{cases}9\\3\end{cases}$ (9 e 3 puntos críticos)



+ - +
Signo B´(t)

Os beneficios **aumentan** entre o inicio e o terceiro ano (0,3) e entre os anos 9 e 10 (9,10),**diminúen** entre o terceiro e noveno ano(3,9).

c) En que anos se producen os beneficios máximos e mínimos e a canto ascenden?
B(t) ten un máximo en t=3; B(3)=105
Os **beneficios máximos** ascenden a **105.000**€ no **terceiro ano** (t=3)
B(t) ten un mínimo en t=9; B(9)=-3 ;B(0)=-3
Os **beneficios mínimos**(perdas neste caso) son de **-3000€** o **inicio** (t=0) e no **noveno ano** (t=9)

d) Calcule $\int_1^2 B(t)dt$

$$\int_1^2 B(t)dt=\int_1^2 (t^3-18t^2+81t-3\ )dt=\frac{t^4}{4}-6t^3+\frac{81}{2}t^2-3t]_1^2$$

$$=(4-48+162-6)-\left(\frac{1}{4}-6+\frac{81}{2}-3\right)=121-\frac{163}{4}=\frac{321}{4}=\mathbf{80,25}$$

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 5. Estatística e Probabilidade. Nunha poboación o 45 % son homes. O 27% desa poboación resulta ser home e lector de prensa deportiva, mentres que un 38.5% é muller e non lectora desa prensa.

a) Das mulleres, que porcentaxe le prensa deportiva?

Sexan os sucesos
H=”home”; M=”muller”; D=”lector prensa deportiva” ; $\overline{\mathrm{D}}$=”non lector prensa deportiva”

Datos: P(H)=0,45; P($H \cap D$)=0,27;P(M∩ $\overline{\mathrm{D}}$)=0,385

Entón tamén podemos calcular P(M)=1-P(H)=0,55; P(D∩ M)=P(M)- P(M∩ $\overline{\mathrm{D}}$)=0,55-0,385=0,165; P(D)= P($D \cap H$)+ P(D∩ M)=0,27+0,165=0,435

Para responder o apartado **a)** debemos calcular P(D|M)=$\frac{P(D \cap M)}{P(M)}$= $\frac{0{,}165}{0{,}55}$=0,3

Polo tanto o **30% das mulleres le prensa deportiva**

b) Que porcentaxe é muller ou le prensa deportiva?

Calculamos P(M∪D)=P(M)+ P(D)-P(M∩D)=0,55+0,435-0,165=0,82

O **82% é muller ou le prensa deportiva**

c) Dos lectores de prensa deportiva, que porcentaxe son homes?

P(H|D)= $\frac{P(H \cap D)}{P(D)}$ =$\frac{0{,}27}{0{,}435}$=0,6206

Dos lectores de prensa deportiva o 62,06% son homes

d) Son incompatibles os sucesos ser home e non ler prensa deportiva? Xustifique a resposta.

Os sucesos ser home e non ler prensa deportiva son incompatibles se H∩ $\overline{\mathrm{D}}$=∅, entonces P(H∩ $\overline{\mathrm{D}}$)=0

Calculamos P (H∩ $\overline{\mathrm{D}}$)=P(H)-P(H∩ D) $= 0{,}45 - 0{,}27$=0,18≠0

Entón os sucesos ser home e non ler prensa deportiva **NON son incompatibles**

Tamén podemos resolver o exercicio a través de unha táboa:

	D	$\overline{\mathrm{D}}$	
H	0,27	0,18	0,45
M	0,165	0,385	0,55
	0,435	0,565	1

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 6. Estatística e Probabilidade. Unha compañía de seguros quere determinar que proporción dos seus clientes estaría disposta a aceptar unha subida de tarifas a cambio dun incremento nas súas prestacións. Unha enquisa previa indica que esta proporción está en torno ao 15%.

a) De que tamaño mínimo debería será a mostra se se quere estimar dita proporción cun erro inferior a 0,08 e un nivel de confianza do 95%?

p = proporción de clientes disposta a aceptar unha subida

e= $z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}<0{,}08$

$\hat{p}$ =0,15

Nivel de confianza : 95%→1-α = 0,95→ $z_{\alpha/2}$ =1,96

$1{,}96\sqrt{\frac{0{,}15\times 0{,}85}{n}}<0{,}08 \Rightarrow \frac{1{,}96\times 0{,}36}{0{,}08}<\sqrt{n}$ ⇒n>76,53

O **tamaño mínimo** da mostra para estimar dita proporción cun erro inferior a 0,08 e un nivel de confianza do 95% debe ser de **77 clientes**.

Finalmente, realízase o estudo cunha mostra de 196 clientes, dos que 37 manifestaron a súa conformidade coa proposta. **b)** Calcule un intervalo de confianza, ao 92%, para a proporción de clientes da compañía que aceptaría dita proposta. Cal e o erro máximo cometido?

O intervalo de confianza para p e da forma $\left(\hat{p}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)_{1-\alpha}$

$\hat{p}=\frac{37}{196}$ = 0,1887≅0,19

Nivel de confianza : 92%→1-α = 0,92→ $z_{\alpha/2}$ =1,75

Calculamos o intervalo

$\left(0{,}19-1{,}75\sqrt{\frac{0{,}19x0{,}81}{196}}\,;\,0{,}19+1{,}75\sqrt{\frac{0{,}19x0{,}81}{196}}\right)$ =(0,19-0,049;0,19+0,049)=(0,141;0,239)

o I.C ao 92%, para a proporción de clientes que aceptaría a proposta (0,141;0,239)⇔ $(\mathbf{14,1\%};\mathbf{23,9\%})_{\mathbf{92\%}}$

O erro máximo cometido e= $z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ **=0,049≅5%**