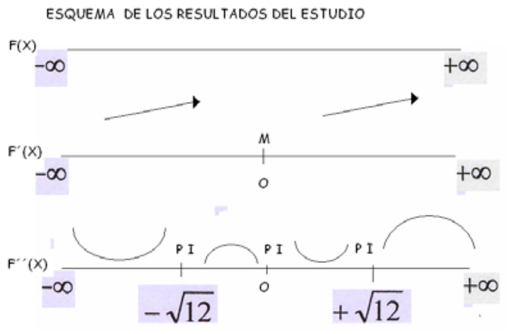
Estudio completo de $y=\dfrac{x^3}{x^2+4}$

1º Dominio de f(x): $D[f(x)]=\Re$



2ª Cortes con los ejes:

Corte con OX: (¿,0)
0= x^3 , x=0; **(0,0)**

Corte con OY: (0,?)
$f(0)=o$; **(0,0)**

3º Simetrías:

$f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2+4}=-\dfrac{x^3}{x^2+4}=-f(x)$ es una función impar.

4º Asíntotas:

A.V. : No tiene asíntotas verticales f(x) siempre existe.

A.H. : 1º Se calcula el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **:** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2+4}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

No tiene asíntotas horizontales.

A.O. :A) Se calcula **"m"**:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2+4}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3+4x^2}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$$

Por lo tanto existe una asíntota oblicua $y=x+n\longrightarrow n=y-x$

B) Se calcula el **"n"**:

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+4}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3-4x}{x^2+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{x^2+4}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{x^2}=-0$$

C) Luego "$y=x$" será una asíntota oblicua.

Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	$y=\dfrac{x^3}{x^2+4}$	$y=x$	Y_1- Y_2	situación
x=100	$y_1=\dfrac{100^3}{100^2+4}=$ 99,96001599	$y_2=100$	$99{,}96001599-100<0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el +∞
x=-100	$y_1=\dfrac{(-100)^3}{(-100)^2+4}=$ $-99{,}96001599$	$y_2=-100$	$-99{,}96001599-(-100)>0$ -	La gráfica esta por encima de la asíntota en el -∞

5º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía

$$y´=\frac{(x^2+4)3x^2-x^3.2x}{(x^2+4)^2}=\frac{x^4+12x^2}{(x^2+4)^2} \qquad y´=0 \quad \Rightarrow \quad x^4+12x^2=0 \Rightarrow x^2(x^2+12)=0 \begin{cases} x^2=0 & \text{x=0} \\ x^2+12=0 \end{cases}$$

$\forall x \in (-\infty,0) \Rightarrow \quad y´(-4)>0$ creciente

$\forall x \in (0,+\infty) \Rightarrow \quad y´(-4)>0$ creciente

No tiene ni máximos ni mínimos relativos.

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y´´=\frac{(x^2+4)^2.(4x^3+24x)-(x^4+12x^2)2.2x.(x^2+4)}{(x^2+4)^4} \underset{factorizar}{=} \frac{(x^2+4)(4x^5+16x^3+24x^3+96x-4x^5-48x^3)}{(x^2+4)^4}=\frac{-8x^3+96x}{(x^2+4)^3}$$

$$y´´=0 \quad \Rightarrow \quad -8x^3+96x=0 \Rightarrow 8x(-x^2+12)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ -x^2+12=0 \Rightarrow \begin{cases} x=+\sqrt{12}=2\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{12}=-2\sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$

$\forall x \in (-\infty,-\sqrt{12}) \Rightarrow \quad y´´(-8)>0$ cóncava

$\forall x \in (-\sqrt{12},0) \Rightarrow \quad y´´(-1)<0$ convexa

$\forall x \in (0, \quad \sqrt{12}) \Rightarrow \quad y´´(1)>0$ cóncava

$\forall x \in (\sqrt{12}+\infty) \Rightarrow \quad y´´(8)>0$ convexa

La función tiene 3 puntos de inflexión : (0,0) ; $(-2\sqrt{3},\frac{-3}{2}\sqrt{3})$, $(2\sqrt{3},\frac{3}{2}\sqrt{3})$

7º Gráfica: