

Hallar los máximos y los mínimos relativos y los puntos de inflexión de la

función $f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$

1º Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R}$

La función no existe si $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

2º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$

para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{(x^2 + 1)(6x + 1) - (3x^2 + x + 3)2x}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$\frac{6x^3 + 6x + x^2 + 1 - 6x^3 - 2x^2 - 6x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\forall x \in (-\infty, -1) \Rightarrow y'(-2) < 0 \quad \text{decreciente}$$

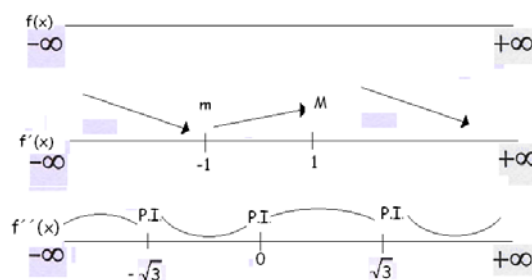
$$\forall x \in (-1, 1) \Rightarrow y'(0) > 0 \quad \text{creciente}$$

$$\forall x \in (1, +\infty) \Rightarrow y'(4) < 0 \quad \text{decreciente}$$

En $x = -1$ hay un mínimo relativo $(-1, 5/2)$

En $x = 1$ hay un Máximo ni mínimo relativo $(1, 7/2)$

ESQUEMA DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO



3º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{(x^2 + 1)^2(-2x) - (-x^2 + 1) \cdot 2 \cdot (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4}$$

$$= \frac{(x^2 + 1)[(x^2 + 1)(-2x) - 4x(-x^2 + 1)]}{(x^2 + 1)^4}$$

factorizar

$$= \frac{-2x^3 - 2x + 4x^3 - 4x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

simplificamos

$$y'' = 0 \Rightarrow 2x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = +\sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\forall x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \Rightarrow y''(-8) < 0 \quad \text{convexa}$$

$$\forall x \in (-\sqrt{3}, 0) \Rightarrow y''(-1) > 0 \quad \text{cóncava}$$

$$\forall x \in (0, \sqrt{3}) \Rightarrow y''(1) < 0 \quad \text{convexa}$$

$$\forall x \in (\sqrt{3}, +\infty) \Rightarrow y''(8) > 0 \quad \text{cóncava}$$

En $(0, 3)$ hay un punto de Inflexión.

En $\left(-\sqrt{3}, \frac{12 - \sqrt{3}}{4}\right)$ hay un punto de Inflexión

En $\left(\sqrt{3}, \frac{12+\sqrt{3}}{4}\right)$ hay un punto de Inflexión

7º Gráfica:

