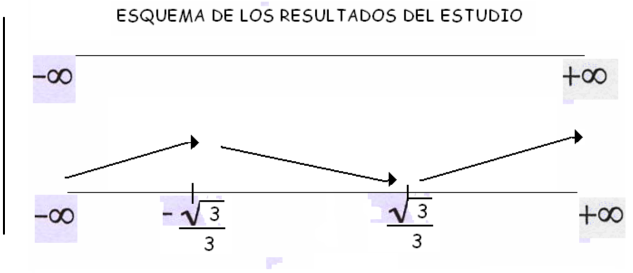
Dada la función $f(x)=\dfrac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}$ **.Calcular los extremos locales y/o globales de la función f(x). Asíntotas y esboza la gráfica.**



1º Dominio de f(x): $D[f(x)]=\Re$

La función no existe si:

$$\left(1+x^2\right)^2=0 \Rightarrow 1+x^2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}\ no\ existe$$

2º Asíntotas:

***A.V.** : No tiene, la función existe $\forall x \in \Re$

***AH.** :

A) Se calcula el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L\acute{}Hopital}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{2\left(1+x^2\right)2x}=\frac{-4}{+\infty}=-0$$

Luego **"y=0" asíntota horizontal en el +∞. La curva está por debajo de la asíntota.**

B) Se calcula el $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{\substack{cambiamos\\ x\ por\ -x}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x}{\left(1+x^2\right)^2} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L\acute{}Hopital}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{2\left(1+x^2\right)2x}=\dfrac{4}{+\infty}=+0$

Luego **"y=0" asíntota horizontal en el -∞. La curva está por encima de la asíntota.**

3º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía

$$y\acute{}=\frac{\left(1+x^2\right)^2.(-4)-(-4x).2\left(1+x^2\right)2x}{\left(1+x^2\right)^4} \underset{factorizamos}{=} \frac{\left(1+x^2\right)\left[-4-4x^2+16x^2\right]}{\left(1+x^2\right)^4} \underset{simplificamos}{=} \frac{12x^2-4}{\left(1+x^2\right)^3}$$

$$y\acute{}=0 \quad \Rightarrow 12x^2-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$\forall x \in \left(-\infty,\dfrac{-\sqrt{3}}{3}\right)$ $y\acute{}(-4)>0$ creciente $\qquad$ $\forall x \in \left(\dfrac{-\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ $y\acute{}(0)<0$ decreciente

$\forall x \in \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ $y\acute{}(10)>0$ creciente

$x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $f(-\dfrac{\sqrt{3}}{3})=\dfrac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. **En** $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ **existe un Máximo relativo relativo.**

$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $f(\dfrac{\sqrt{3}}{3})=\dfrac{\frac{-4\sqrt{3}}{3}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{-3\sqrt{3}}{4}$. **En** $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{-3\sqrt{3}}{4}\right)$ **existe un mínimo relativo relativo.**

Máximos y mínimos globales $\begin{cases} si\ x\to+\infty \Rightarrow f(x)\to 0 \\ si\ x=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \quad ; f(\dfrac{\sqrt{3}}{3})=\dfrac{-3\sqrt{3}}{4} \\ si\ x=\dfrac{-\sqrt{3}}{3} \quad ; f(\dfrac{\sqrt{3}}{3})=\dfrac{3\sqrt{3}}{4} \\ si\ x\to-\infty \Rightarrow f(x)\to 0 \end{cases}$

La función tiene un máximo absoluto en $x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ **que es** $f(\frac{-\sqrt{3}}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

La función tiene un mínimo absoluto en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **que es** $f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{-3\sqrt{3}}{4}$

4º Gráfica: