

Dada la función $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$. Calcular sus máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

Asíntotas y esboza la gráfica. (Ejercicio de selectividad y dan como dato los valores de x dónde la función tiene puntos de inflexión) Curvatura estudiada aunque no se pide.

1º Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R}$

La función no existe si:

$$(x^2+x+1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2+x+1=0 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \text{ no existe} \end{cases}$$

2º Asíntotas:

*A.V. : No tiene, la función existe $\forall x \in \mathbb{R}$

*A.H. :

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2(x^2+x+1)(2x+1)} = \frac{2}{+\infty} = +0$$

Luego " $y=0$ " asíntota horizontal en el $+\infty$. La curva está por encima de la asíntota.

B) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} \stackrel{\text{cambiamos } x \text{ por } -x}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x+1}{(x^2-x+1)^2} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{2(x^2-x+1)(2x-1)} = \frac{-2}{+\infty} = -0$$

Luego " $y=0$ " asíntota horizontal en el $-\infty$. La curva está por debajo de la asíntota.

3º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y'=0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{(x^2+x+1)^2 \cdot (2) - (2x+1) \cdot 2(x^2+x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^4} \stackrel{\text{factorizamos}}{=} \frac{(x^2+x+1)[2(x^2+x+1) - 2(4x^2+4x+1)]}{(x^2+x+1)^4} \stackrel{\text{simplificamos}}{=}$$

$$\frac{2x^2+2x+2-8x^2-8x-2}{(x^2+x+1)^3} = \frac{-6x^2-6x}{(x^2+x+1)^3}$$

$$y'=0 \quad -6x^2-6x=0 \Rightarrow -6x(x+1)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$\forall x \in (-\infty, -1) \quad y'(-4) < 0 \quad \text{decreciente} \rightarrow$$

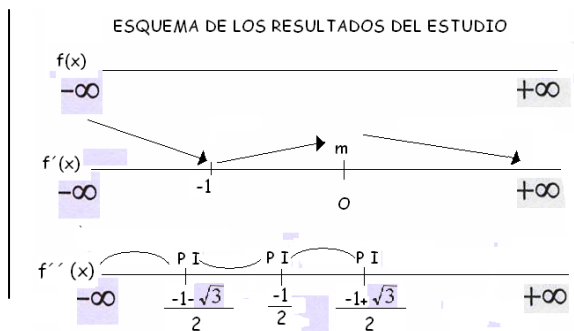
$$\forall x \in (-1, 0) \quad y'(-0.5) > 0 \quad \text{creciente} \rightarrow$$

$$\forall x \in (0, +\infty) \quad y'(10) < 0 \quad \text{decreciente} \rightarrow$$

$$x=0 \quad ; f(0) = \frac{1}{(1)^2} = 1. \text{ En } (0, 1) \text{ existe un Máximo relativo.}$$

$$x=-1 \quad ; f(-1) = \frac{-1}{(1-1+1)^2} = -1. \quad \text{En } (-1, -1) \text{ existe un mínimo relativo.}$$

4º Curvatura, puntos de inflexión.



$$y'' = \frac{(x^2 + x + 1)^3 \cdot (-12x - 6) - (-6x^2 - 6x)3(x^2 + x + 1)^2 \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^6} =$$

factorizamos

$$\frac{(x^2 + x + 1)^2 (2x + 1) [(x^2 + x + 1)(-6) - (-6x^2 - 6x)3]}{(x^2 + x + 1)^6} =$$

simplificamos

$$\frac{(2x + 1)(-6x^2 - 6x - 6 + 18x^2 + 18x)}{(x^2 + x + 1)^4} = \frac{(2x + 1)(12x^2 + 12x - 6)}{(x^2 + x + 1)^4}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow (2x + 1)(12x^2 + 12x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ 12x^2 + 12x - 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\forall x \in \left(-\infty, \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\right) \quad y''(-4) < 0 \quad \text{convexa} \quad \forall x \in \left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad y''(-1) > 0 \quad \text{cóncava}$$

$$\forall x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right) \quad y''(0) < 0 \quad \text{convexa} \quad \forall x \in \left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, +\infty\right) \quad y''(0) < 0 \quad \text{cóncava}$$

Puntos de inflexión en $x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$ y en $x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$.

4º Gráfica:

