

Estudio completo de $y = \frac{2x^2}{x^2 + 4}$

1º Dominio de f(x): $D[f(x)] = \mathbb{R}$

La función no existe si

$$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \text{ no tiene solución}$$

2ª Cortes con los ejes:

Corte con OX: $(0,0)$

$$0 = 2x^2, x=0; \quad (0,0)$$

Corte con OY: $(0, \frac{1}{2})$

$$f(0) = 0; \quad (0,0)$$

3º Simetrías:

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2 + 4} = \frac{2x^2}{x^2 + 4} = f(x) \text{ es una función par.}$$

4º Asíntotas:

***A.V. :** No tiene la función siempre existe

***A.H. :**

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \text{ Luego "y=2" será una asíntota horizontal.}$$

B) Se determina la posición relativa de la gráfica y la asíntota:

	$y = \frac{2x^2}{x^2 + 4}$	$y_1 - 2$	Situación relativa de la gráfica y la asíntota
$x=100$	$y = \frac{2(100)^2}{(100)^2 + 4} = 1,99920032$	$1,99992003 - 2 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $+\infty$
$x=-100$	$y = \frac{2(100)^2}{(100)^2 + 4} = 1,99920032$	$1,99992003 - 2 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $-\infty$

A.O. : No tiene porque tiene asíntota horizontal

5º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{(x^2 + 4)(4x) - (2x) \cdot 2x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{4x^3 + 16x - 4x^3}{(x^2 + 4)^2} = \frac{+16x}{(x^2 + 4)^2}$$

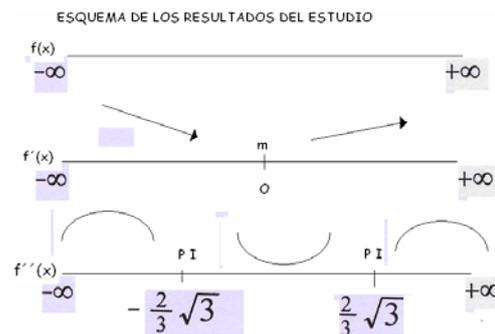
$$y' = 0 \Rightarrow -16x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow y'(-4) < 0 \quad \text{decreciente} \rightarrow$$

$$\forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow y'(4) > 0 \quad \text{creciente} \rightarrow$$

En (0,0) existe un mínimo relativo.

6º Curvatura, puntos de inflexión.



$$y'' = \frac{(x^2 + 4)^2 \cdot (16) - (16x) \cdot 2 \cdot 2x(x^2 + 4)}{(x^2 + 4)^4} \stackrel{\text{factorizar}}{=} \frac{(x^2 + 4)(16x^2 + 64 - 64x^2)}{(x^2 + 4)^4} = \frac{-48x^2 + 64}{(x^2 + 4)^3}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow -48x^2 + 64 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} \begin{cases} x = \frac{-2}{3}\sqrt{3} \\ x = \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\forall x \in \left(-\infty, \frac{-2}{3}\sqrt{3}\right) \Rightarrow y''(-8) < 0 \quad \text{convexa}$$

$$\forall x \in \left(\frac{-2}{3}\sqrt{3}, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) \Rightarrow y''(0) > 0 \quad \text{cóncava}$$

$$\forall x \in \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, +\infty\right) \Rightarrow y''(8) < 0 \quad \text{convexa}$$

Puntos de inflexión: $\left(\frac{-2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$

7º Gráfica:

