

Estudio completo de $y = \sqrt[3]{x^2}$.

1º Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R}$

2º Cortes con los ejes:

Corte con OX: $(\neq, 0)$

$0 = \sqrt[3]{x^2}, x=0; (0,0)$

Corte con OY: $(0,?)$

$f(0) = 0; (0,0)$

3º Simetrías:

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2} = \sqrt[3]{x^2} = f(x)$$

Es una función par.

Simétrica respecto del eje OY.

4º Asíntotas:

***A.V. :** $D[f(x)] = \mathbb{R}$

Luego no tiene asíntota vertical

***A.H. :** Por no ser una función del tipo $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ $\left\{ \begin{array}{l} P(x) \text{ polinomio} \\ Q(x) \text{ polinomio} \end{array} \right.$ hay que

calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty \text{ Luego no hay asíntota horizontal.}$$

B) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty \text{ Luego no hay asíntota horizontal.}$$

***A.O.:** $y = mx + n$

1º Se calcula "m":

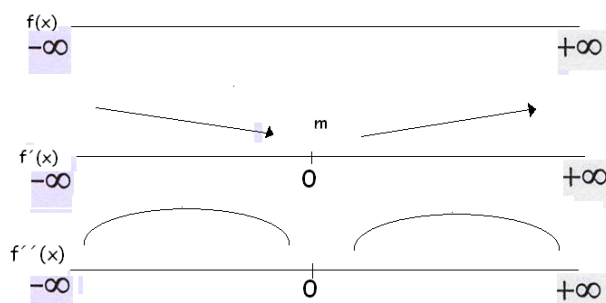
$$- \text{ A) } m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{\frac{\infty}{\infty} x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}} = \frac{1}{+\infty} = +0$$

No hay asíntota oblicua pero la curvatura será

$$- \text{ B) } m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{\frac{\infty}{-\infty} x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{-x} = \lim_{\frac{\infty}{-\infty} x \rightarrow -\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}} = \frac{-1}{+\infty} = -0$$

No hay asíntota oblicua pero la curvatura será

ESQUEMA DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO



5º Monotonía. Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2)^2}} = \frac{2x}{3 \cdot x \cdot \sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$$

$y' = 0 \Rightarrow 2 \neq 0$ luego nunca se anula la derivada y' .

Pero y' deja de existir si $\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0$ y puede haber un cambio de monotonía.

$\forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow y'(-15) < 0$ decreciente 

$\forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow y'(15) > 0$ creciente 

En (0,0) existe un mínimo relativo (En este caso es un punto anguloso, $y'(0)$ no existe).

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{2}{3} \cdot \frac{-1}{3} \cdot x^{-\frac{4}{3}} = \frac{-2}{9 \cdot x \cdot \sqrt[3]{x}}$$

$y'' = 0 \Rightarrow -2 \neq 0$ luego nunca se anula la derivada y'' .

Pero y'' deja de existir si $x \cdot \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0$ y podría haber un cambio de curvatura, cosa imposible en este por tener en $x=0$ un mínimo relativo

$\forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow y''(-8) < 0$  concava

$\forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow y''(1) < 0$  concava

No hay puntos de inflexión.

7º Gráfica:

