

Estudio completo de $y = \sqrt[3]{x^2 - 4}$.

1º Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R}$

2ª Cortes con los ejes:

Corte con OX: $(\pm 2, 0)$

$$0 = \sqrt[3]{x^2 - 4}, \quad x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = 2 \Rightarrow (2, 0) \\ x = -2 \Rightarrow (-2, 0) \end{cases}$$

Corte con OY: $(0, \pm 2)$

$$f(0) = \sqrt[3]{-4} \quad ; \quad (0, \sqrt[3]{-4})$$

3º Simetrías:

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2 - 4} = \sqrt[3]{x^2 - 4} = f(x)$$

Es una función par.

Simétrica respecto del eje OY.

4º Asíntotas:

***A.V. :** $D[f(x)] = \mathbb{R}$

Luego no tiene asíntota vertical

***A.H. :** Por no ser una función del tipo $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ $\begin{cases} P(x) & \text{polinomio} \\ Q(x) & \text{polinomio} \end{cases}$ hay que

calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2 - 4} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty \quad \text{Luego no hay asíntota horizontal.}$$

B) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2 - 4} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty \quad \text{Luego no hay asíntota horizontal.}$$

***A.O.:** $y = m x + n$

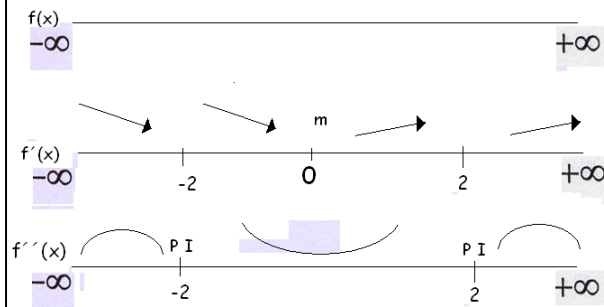
1º Se calcula "m":

$$- \quad \text{A) } m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{+\infty} = +0$$

No hay asíntota oblicua pero la curvatura será

$$- \quad \text{B) } m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{-\infty} = -0$$

ESQUEMA DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO



+ ∞ ←

No hay asíntota oblicua pero la curvatura será

5° Monotonía. Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía $y' = \frac{2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}}$

$$y' = 0 \Rightarrow \text{si } x = 0$$

Pero y' deja de existir si $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow x = -2$ y puede haber un cambio de monotonía.

$$\forall x \in (-\infty, -2) \Rightarrow y'(-15) < 0 \quad \text{decreciente} \quad \swarrow$$

$$\forall x \in (-2, 0) \Rightarrow y'(-1) < 0 \quad \text{decreciente} \quad \swarrow$$

$$\forall x \in (0, 2) \Rightarrow y'(1) > 0 \quad \text{creciente} \quad \searrow$$

$$\forall x \in (2, +\infty) \Rightarrow y'(15) > 0 \quad \text{creciente} \quad \searrow$$

En $(0, \sqrt[3]{-4})$ existe un mínimo relativo (En este caso es un punto anguloso, $y'(0)$ no existe).

6° Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2} - x \cdot \frac{2(x^2 - 4)2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 4)^4}}}{\sqrt[3]{(x^2 - 4)^4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 4)^6} - 4x^2(x^2 - 4)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 4)^4}} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3 \cdot (x^2 - 4)^2 - 4x^2(x^2 - 4)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 4)^8}} = \frac{2}{9} \cdot \frac{(x^2 - 4)(3x^2 - 12 - 4x^2)}{(x^2 - 4)^2 \sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}} =$$

$$\frac{2}{9} \cdot \frac{[-12 - x^2]}{(x^2 - 4) \sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y'' \neq 0 \quad -x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = -12 \Rightarrow x \notin \mathbb{R} \quad \text{luego nunca se anula la derivada } y''.$$

Pero y'' deja de existir si $(x^2 - 4) \sqrt[3]{(x^2 - 4)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$ y podría haber un cambio de curvatura.

$$\forall x \in (-\infty, -2) \Rightarrow y''(-8) < 0 \quad \text{convexa} \quad \text{⌒}$$

$$\forall x \in (-2, 2) \Rightarrow y''(0) < 0 \quad \text{cóncava} \quad \text{⌒}$$

$$\forall x \in (2, +\infty) \Rightarrow y''(8) < 0 \quad \text{convexa} \quad \text{⌒}$$

Puntos de inflexión en $(-2, 0)$ y en $(2, 0)$.

7° Gráfica:

