

Estudio completo de $y = \sqrt{x^2 - 4}$.

1º Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R}$

La función existe si $x^2 - 4 > 0$

$$x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\forall x \in (-\infty, -2) \Rightarrow x^2 - 4 > 0$$

$$\forall x \in (-2, 2) \Rightarrow x^2 - 4 < 0$$

$$\forall x \in (2, +\infty) \Rightarrow x^2 - 4 > 0$$

Luego existe $\forall x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

$$D[f(x)] = \mathbb{R} - (2, 2)$$

2º Cortes con los ejes:

Corte con OX: $(\pm 2, 0)$

$$0 = \sqrt{x^2 - 4}, \quad x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = 2 \Rightarrow (2, 0) \\ x = -2 \Rightarrow (-2, 0) \end{cases}$$

Corte con OY: $(0, ?)$

$$f(0) = \sqrt{-4} \text{ no existe, no corta el OY.}$$

3º Simetrías:

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 4} = \sqrt{x^2 - 4} = f(x)$$

Es una función par.

Simétrica respecto del eje OY.

4º Asíntotas:

***A.V. :** Existe $\forall x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, dónde toma valores reales.

Luego no tiene asíntota vertical

***A.H. :** Por no ser una función del tipo $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ $\begin{cases} P(x) & \text{polinomio} \\ Q(x) & \text{polinomio} \end{cases}$ hay que

calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 4} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty \text{ Luego no hay asíntota horizontal.}$$

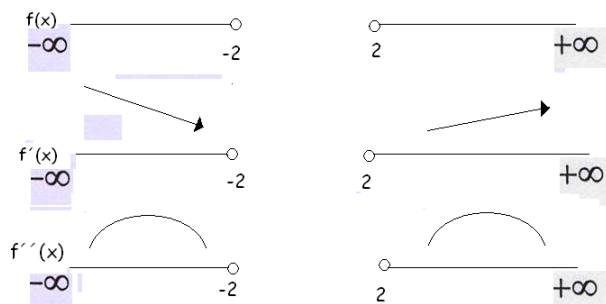
B) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 4} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty \text{ Luego no hay asíntota horizontal.}$$

***A.O**

A) cuando $x \rightarrow +\infty$.

ESQUEMA DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO



1º Se calcula "m" :

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} = \lim_{\substack{\infty \\ x \rightarrow +\infty \\ \infty}} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$$

Por lo tanto existe una asíntota oblicua $y = x + n \rightarrow n = y - x$

2º Se calcula el "n":

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4} - x \right) = \lim_{\substack{\infty - \infty \\ x \rightarrow +\infty}} \frac{(\sqrt{x^2 - 4} - x)(\sqrt{x^2 - 4} + x)}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \frac{-4}{+\infty} = -0$$

Luego " $y=x$ " será una asíntota oblicua.

Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	$y = \sqrt{x^2 - 4}$	$Y=x$	$Y_1 - Y_2$	situación
$x=100$	$y_1 = \sqrt{100^2 - 4} = 99,979998$	$y_2 = 100$	$99,979998 - 100 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $+\infty$

(como se observa en la gráfica adjunta)

B) cuando $x \rightarrow -\infty$.

1º Se calcula "m" :

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} = \lim_{\substack{x \text{ por } -x \\ x \rightarrow -\infty \\ -x}} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{-x} = \lim_{\substack{\infty \\ x \rightarrow +\infty \\ -\infty}} \frac{\sqrt{x^2}}{-x} = -1$$

Por lo tanto existe una asíntota oblicua $y = -x + n \rightarrow n = y + x$

2º Se calcula el "n":

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4} + x \right) = \lim_{\substack{x \text{ por } -x \\ x \rightarrow +\infty}} \left(\sqrt{x^2 - 4} - x \right) = \lim_{\substack{\infty - \infty \\ x \rightarrow +\infty}} \frac{(\sqrt{x^2 - 4} - x)(\sqrt{x^2 - 4} + x)}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \frac{-4}{+\infty} = -0$$

Luego " $y=-x$ " será una asíntota oblicua.

Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	$y = \sqrt{x^2 - 4}$	$Y=-x$	$Y_1 - Y_2$	situación
$x=-100$	$y_1 = \sqrt{(-100)^2 - 4} = 99,979998$	$y_2 = +100$	$99,979998 - 100 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $+\infty$

5º Monotonía. Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía $y' = \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2 - 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$

$y' = 0 \Rightarrow$ si $x = 0 \notin$ Dominio de $f(x)$

Pero y' deja de existir si $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow x = -2$ y no puede haber un cambio de monotonía, porque no existe a la derecha de $x = -2$, ni a la izquierda de $x = 2$.

.

$\forall x \in (-\infty, -2) \Rightarrow y'(-15) < 0$ decreciente 

$\forall x \in (2, +\infty) \Rightarrow y'(15) > 0$ creciente 

No hay ni máximos ni mínimos. Relativos.

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{\sqrt{x^2 - 4} - x \cdot \frac{.2x}{2 \cdot \sqrt{x^2 - 4}}}{\sqrt{(x^2 - 4)^2}} = \frac{x^2 - 4 - x^2}{x^2 - 4} = \frac{-4}{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 4}}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y' \neq 0 \Rightarrow -4 \neq 0$ luego nunca se anula la derivada y'' .

Pero y'' deja de existir si $(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$ pero en estos puntos

no puede haber un cambio de curvatura porque no existe a la derecha de $x = -2$, ni a la izquierda de $x = 2$.

$\forall x \in (-\infty, -2) \Rightarrow y''(-8) < 0$  convexa

$\forall x \in (2, +\infty) \Rightarrow y''(8) < 0$  convexa

Puntos de inflexión no tiene.

7º Gráfica:

