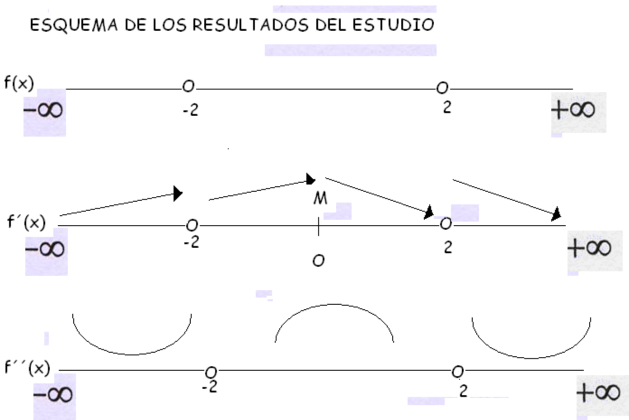
Estudio completo de $y=\frac{2x^2}{x^2-4}$

1º Dominio de f(x):

$D[f(x)]=\Re-\{-2,2\}$

La función no existe si

$x^2-4=0\begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$



2ª Cortes con los ejes:

Corte con OX: (¿,0)

0= $2x^2$, x=0; **(0,0)**

Corte con OY: (0,?)

$f(0)=o$; **(0,0)**

3º Simetrías:

$f(-x)=\frac{2(-x)^2}{(-x)^2-4}=\frac{2x^2}{x^2-4}=f(x)$ es una función par.

4º Asíntotas:

***A.V.** : $D[f(x)]=\Re-\{-2,2\}$

Luego tiene como posible asíntota vertical: **¿x=2?** o **¿x=-2?**

A) ¿ A.V. en x=-2. ?

$$\lim_{x\to-2}\frac{2x^2}{x^2-4}=\frac{8}{0}\quad hay\quad que\quad hacer\quad límites\quad laterales\begin{cases} \lim_{x\to-2^-}\frac{2x^2}{x^2-4}=\frac{8}{+0}=+\infty \\ \lim_{x\to-2^+}\frac{2x^2}{x^2-4}=\frac{8}{-0}=-\infty \end{cases}\quad \lim_{x\to-2}\frac{2x^2}{x^2-4}\,No\quad existe$$

Este límite nos sirve para determinar que **x=-2** ASÍNTOTA VERTICAL

B) ¿ A.V. en x=2. ?

$$\lim_{x\to2}\frac{2x^2}{x^2-4}=\frac{8}{0}\quad hay\quad que\quad hacer\quad límites\quad laterales\begin{cases} \lim_{x\to2^-}\frac{2x^2}{x^2-4}=\frac{8}{-0}=-\infty \\ \lim_{x\to2^+}\frac{2x^2}{x^2-4}=\frac{8}{+0}=+\infty \end{cases}\quad \lim_{x\to2}\frac{2x^2}{x^2-4}\,No\quad existe$$

Este límite nos sirve para determinar que **x=2** ASÍNTOTA VERTICAL

***AH.** :

A) Se calcula el $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-4}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$ Luego **"y=2"** será una asíntota horizontal.

B) Se determina la posición relativa de la gráfica y la asíntota:

	$y=\frac{2x^2}{x^2-4}$	**Y_1- 2**	**Situación relativa de la gráfica y la asíntota**
x=100	$y=\frac{2(100)^2}{(100)^2-4}=$ 2,00080032	2,00080032-2>0	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $+\infty$
x=-100	$y=\frac{2(-100)^2}{(-100)^2-4}=$ 2,00080032	2,00080032-2>0	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $-\infty$

A.O. :No tiene porque tiene asíntota horizontal

5º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía

$$y´=\frac{(x^2-4)(4x)-(2x).2x^2}{(x^2-4)^2}=\frac{4x^3-16x-4x^3}{(x^2-4)^2}=\frac{-16x}{(x^2-4)^2}$$

$$y´=0 \quad \Rightarrow \quad -16x=0 \Rightarrow x=0$$

$\forall x \in (-\infty,-2) \Rightarrow \quad y´(-4)>0$ creciente $\qquad \forall x \in (-2,0) \Rightarrow \quad y´(-1)>0$ creciente

$\forall x \in (0,2) \Rightarrow \quad y´(1)<0$ decreciente $\qquad \forall x \in (2,+\infty) \Rightarrow \quad y´(4)<0$ decreciente

En (0,0) existe un Máximo relativo.

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y´´=\frac{(x^2-4)^2.(-16)-(-16x).2.2x(x^2-4)}{(x^2-4)^4} \underset{factorizar}{=} \frac{(x^2-4)(-16x^2+64+64x^2)}{(x^2-4)^4}=\frac{48x^2+64}{(x^2-4)^3}$$

$$y´´=0 \quad \Rightarrow \quad 48x^2+64=0 \Rightarrow x^2=-\frac{4}{3} \quad no \quad hay \quad solución$$

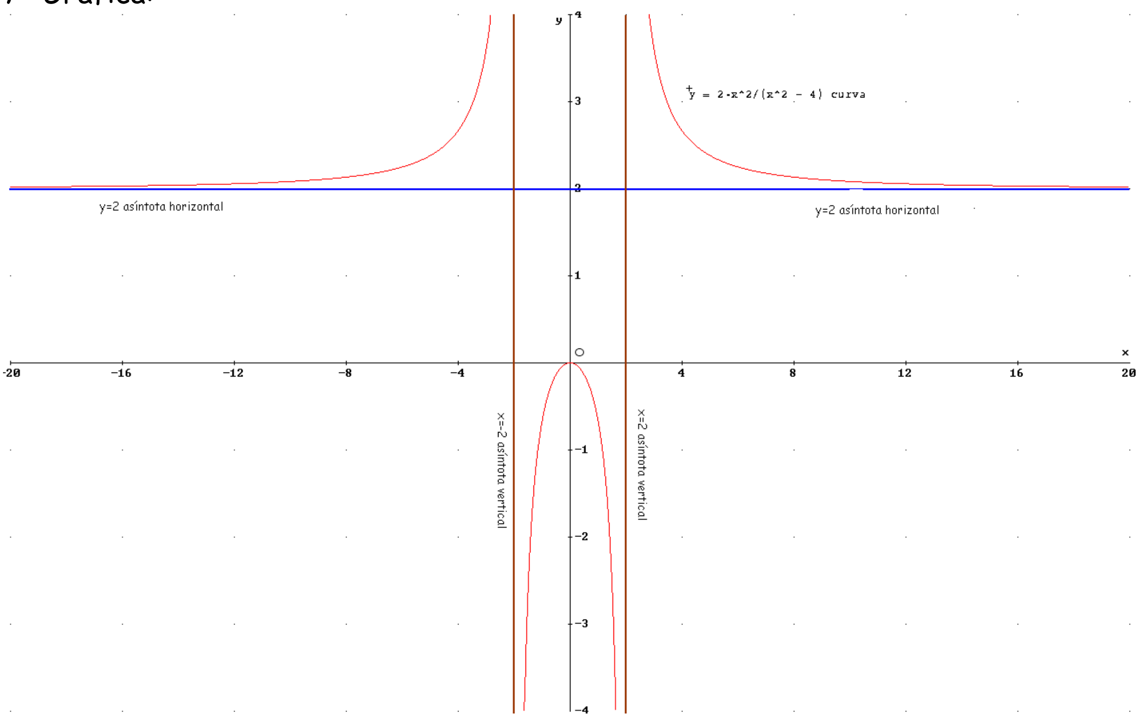
No tiene puntos de inflexión

$\forall x \in (-\infty,-2) \Rightarrow \quad y´´(-8)>0$ cóncava

$\forall x \in (-2,2) \Rightarrow \quad y´´(0)<0$ convexa

$\forall x \in (2,+\infty) \Rightarrow \quad y´´(8)>0$ cóncava

7º Gráfica:



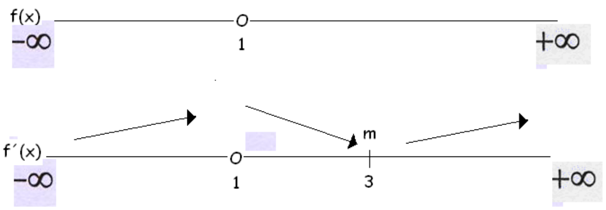
Esboza la gráfica de $y = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$ **calculando el dominio, asíntotas, monotonía, máximos y mínimos relativos.**

1° Dominio de f(x): $D[f(x)] = \Re - \{1\}$

La función no existe si

$x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

ESQUEMA DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO



2° Asíntotas:

***A.V.** : $D[f(x)] = \Re - \{1\}$

Luego tiene como posible asíntota vertical: **¿x=1?**

$$\lim_{x\to 1}\left(x + \frac{4}{(x-1)^2}\right) = 1 + \frac{4}{+0} = 1 + \infty = +\infty$$ Este **x=1** ASÍNTOTA VERTICAL

***AH.** :

A) Se calcula el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{4}{(x-1)^2}\right) = +\infty + \frac{4}{+\infty} = +\infty + 0 = +\infty$$ Luego **no hay asíntota horizontal.**

***A.O.** : y= m x+n

1° Se calcula **"m"**:

$$- \quad m = \lim_{x\to+\infty}\frac{x + \dfrac{4}{(x-1)^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{4}{x(x-1)^2}\right) = 1 + \frac{4}{+\infty} = 1$$

Por lo tanto existe una asíntota oblicua y = x+n → n = y -x

2° Se calcula el **"n"**:

$$n = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{4}{(x-1)^2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{(x-1)^2} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

Luego **"y=x"** será una asíntota oblicua.

Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	$y = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$	Y=x	Y_1- Y_2	situación
x=100	$y_1 = 100 + \dfrac{4}{99^2}$	$y_2 = 100$	$100 + \dfrac{4}{99^2} - 100 > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el +∞
x=-100	$y_1 = -100 + \dfrac{4}{(-101)^2}$	$y_2 = -100$	$-100 + \dfrac{4}{(-101)^2} - (-100) > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el -∞

3° Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = 1 + \frac{-4.2(x-1)}{(x-1)^4} \underset{simplificamos}{=} 1 + \frac{-8}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^3 - 8}{(x-1)^3}$$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^3 - 8 = 0 \Rightarrow \quad (x-1)^3 = 8 \Rightarrow \quad x - 1 = \sqrt[3]{8} \quad \Rightarrow x = 1 + 2 \Rightarrow x = 3$$

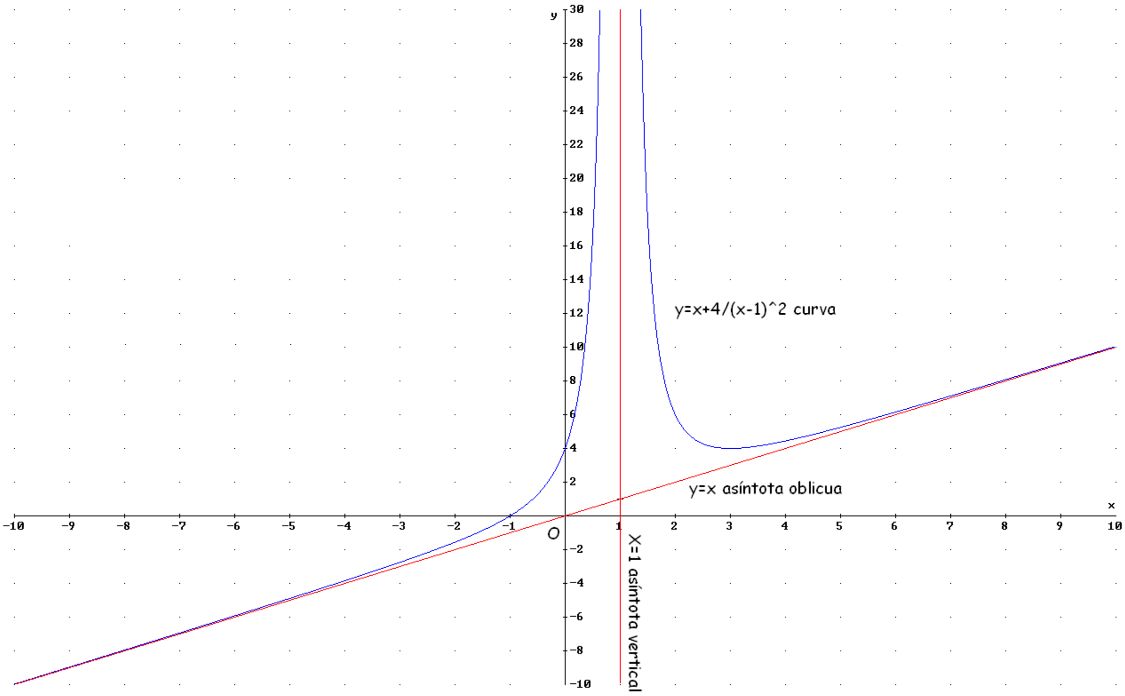
$\forall x \in (-\infty,1) \Rightarrow \quad y'(-4) > 0 \quad$ creciente

$\forall x \in (1,3) \Rightarrow \quad y'(2) < 0 \quad$ decreciente

$\forall x \in (3,+\infty) \Rightarrow \quad y'(4) < 0 \quad$ creciente

En (3,4) existe un mínimo relativo.

4° Gráfica:



Estudio completo de $y=\sqrt[3]{x}$ **.**

1º Dominio de f(x): $D[f(x)]=\Re$

Función irracional de índice impar siempre existe.

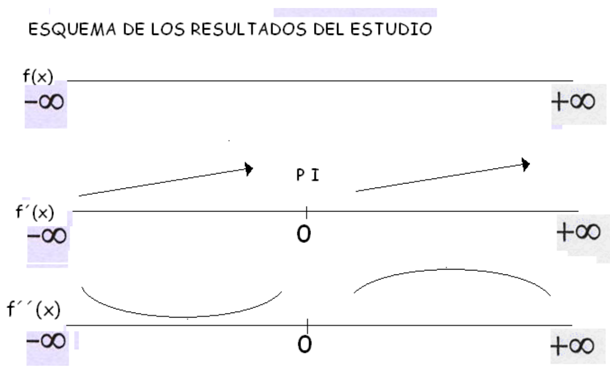
2ª Cortes con los ejes:

Corte con OX: (¿,0)

0= $\sqrt[3]{x}$, x=0; **(0,0)**

Corte con OY: (0,?)

$f(0)=0$; **(0,0)**



3º Simetrías:

$f(-x)=\sqrt[3]{-x}=-\sqrt[3]{x}=-f(x)$

Es una función impar.

Simétrica respecto del origen de coordenadas (0,0).

4º Asíntotas:

***A.V.** : $D[f(x)]=\Re$

Luego no tiene asíntota vertical

A.H.** : **Por no ser una función del tipo** $y=\frac{P(x)}{Q(x)}\begin{cases}P(x) & polinomio\\ Q(x) & polinomio\end{cases}$ ***hay que calcular $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ***y*** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

A) Se calcula el $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{+\infty}=+\infty$ Luego **no hay asíntota horizontal.**

B) Se calcula el $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-\infty}=-\infty$ Luego **no hay asíntota horizontal.**

***A.O.**: y= m x+n

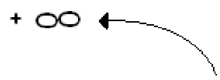
1º Se calcula **"m"**:

- **A)** $m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{+\infty}=+0$

<u>No hay asíntota oblicua pero la curvatura será</u>

- **B)** $m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{x} \underset{x \ por \ -x}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{-x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{-1}{+\infty}=-0$

<u>No hay asíntota oblicua pero la curvatura será</u>



5º Monotonía. Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía de $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$$y' = \frac{1}{3}.x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3.\sqrt[3]{x^2}}$$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 \neq 0$ luego nunca se anula la derivada y´.

Pero y' deja de existir si $\sqrt[3]{x^2} = 0 \Rightarrow \quad x = 0$ y puede haber un cambio de monotonía.

$\forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow \quad y'(-15) > 0$ creciente

$\forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow \quad y'(15) > 0$ creciente

No existen ni máximos ni mínimos relativos.

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{3} \cdot x^{\frac{-5}{3}} = \frac{-2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^5}}$$

$\forall x \in \Re \Rightarrow y'' \neq 0 \quad \Rightarrow \quad -2 \neq 0$ luego nunca se anula la derivada y´´.

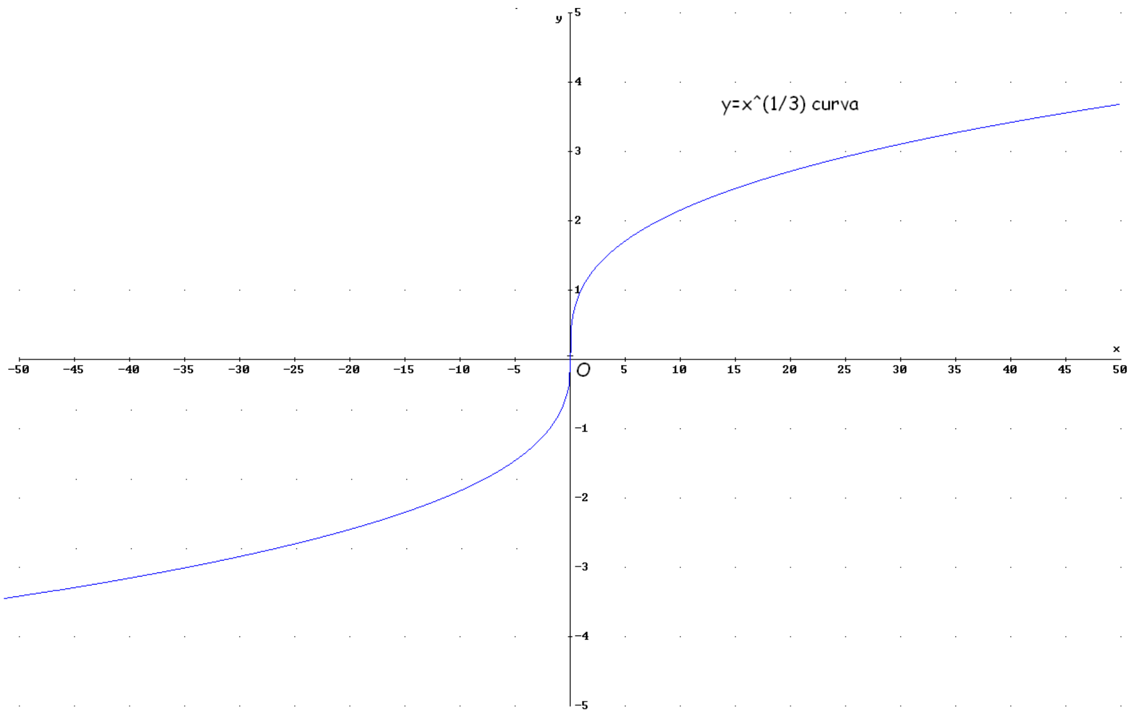
Pero y'' deja de existir si $\sqrt[3]{x^5} = 0 \Rightarrow \quad x = 0$ y podría haber un cambio de curvatura, cosa imposible en este por tener en x=0 un mínimo relativo

$\forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow \quad y''(-8) > 0$ cóncava

$\forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow \quad y''(1) < 0$ convexa

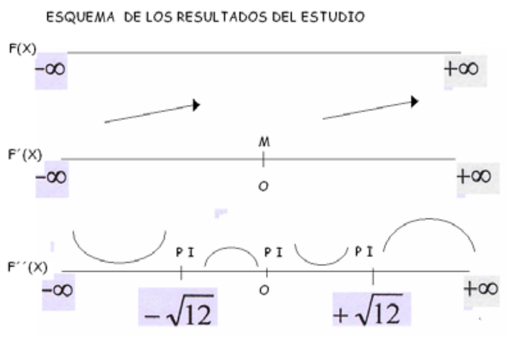
No hay puntos de inflexión.

7º Gráfica:



Estudio completo de $y=\frac{x^3}{x^2+4}$

1º Dominio de f(x): $D[f(x)]=\Re$



2ª Cortes con los ejes:

Corte con OX: (¿,0)
0= x^3 , x=0; **(0,0)**

Corte con OY: (0,?)
$f(0)=o$; **(0,0)**

3º Simetrías:

$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2+4}=-\frac{x^3}{x^2+4}=-f(x)$ es una función impar.

4º Asíntotas:

A.V. : No tiene asíntotas verticales f(x) siempre existe.

A.H. : 1º Se calcula el $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ **:** $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2+4}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$

No tiene asíntotas horizontales.

A.O. :A) Se calcula **"m"**:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2+4}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3+4x^2}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$$

Por lo tanto existe una asíntota oblicua $y=x+n\longrightarrow n=y-x$

B) Se calcula el **"n"**:

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+4}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3-4x}{x^2+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{x^2+4}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{x^2}=-0$$

C) Luego "$y=x$" será una asíntota oblicua.

Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	$y=\frac{x^3}{x^2+4}$	$y=x$	Y_1- Y_2	situación
x=100	$y_1=\frac{100^3}{100^2+4}=$ 99,96001599	$y_2=100$	$99{,}96001599-100<0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el +∞
x=-100	$y_1=\frac{(-100)^3}{(-100)^2+4}=$ $-99{,}96001599$	$y_2=-100$	$-99{,}96001599-(-100)>0$ -	La gráfica esta por encima de la asíntota en el -∞

5º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{(x^2+4)3x^2 - x^3.2x}{(x^2+4)^2} = \frac{x^4+12x^2}{(x^2+4)^2} \qquad y'=0 \ \Rightarrow \ x^4+12x^2=0 \Rightarrow x^2(x^2+12)=0 \begin{cases} x^2=0 \\ x^2+12=0 \end{cases} \quad \text{x=0}$$

$\forall x \in (-\infty,0) \Rightarrow \quad y'(-4)>0$ creciente

$\forall x \in (0,+\infty) \Rightarrow \quad y'(-4)>0$ creciente

No tiene ni máximos ni mínimos relativos.

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{(x^2+4)^2.(4x^3+24x) - (x^4+12x^2)2.2x.(x^2+4)}{(x^2+4)^4} \underset{factorizar}{=} \frac{(x^2+4)(4x^5+16x^3+24x^3+96x-4x^5-48x^3)}{(x^2+4)^4} = \frac{-8x^3+96x}{(x^2+4)^3}$$

$$y''=0 \ \Rightarrow \ -8x^3+96x=0 \Rightarrow 8x(-x^2+12)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ -x^2+12=0 \Rightarrow \begin{cases} x=+\sqrt{12}=2\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{12}=-2\sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$

$\forall x \in (-\infty,-\sqrt{12}) \Rightarrow \quad y''(-8)>0$ cóncava

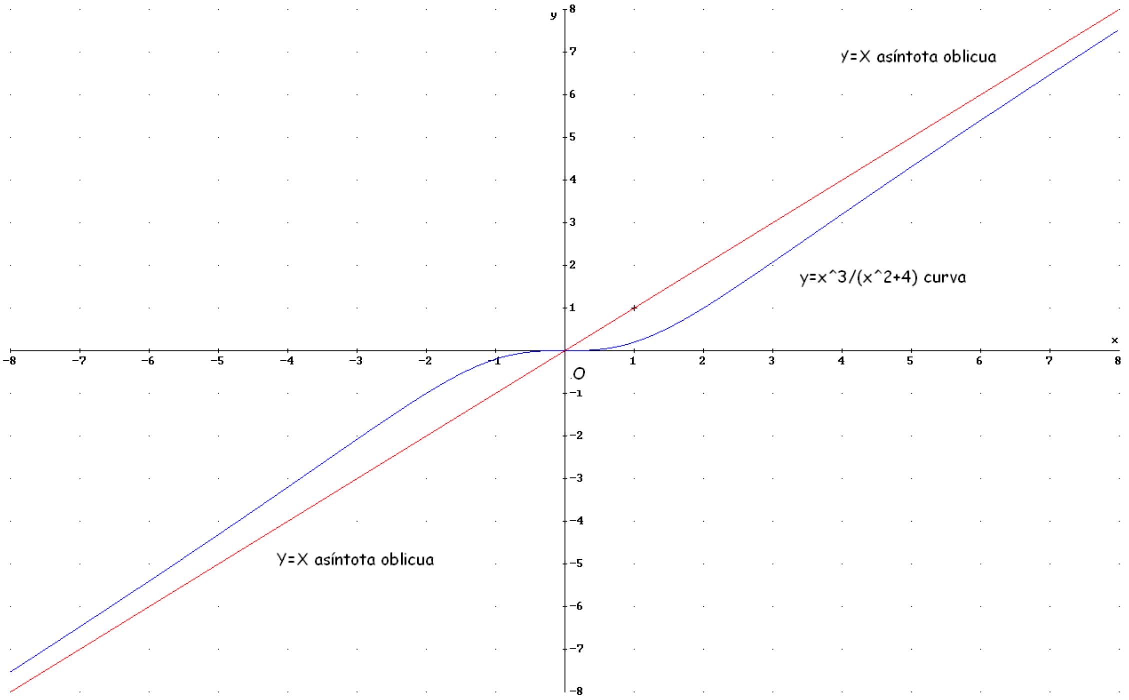
$\forall x \in (-\sqrt{12},0) \Rightarrow \quad y''(-1)<0$ convexa

$\forall x \in (0, \ \sqrt{12}) \Rightarrow \quad y''(1)>0$ cóncava

$\forall x \in (\sqrt{12}+\infty) \Rightarrow \quad y''(8)>0$ convexa

La función tiene 3 puntos de inflexión : (0,0) ; $(-2\sqrt{3},\frac{-3}{2}\sqrt{3})$, $(2\sqrt{3},\frac{3}{2}\sqrt{3})$

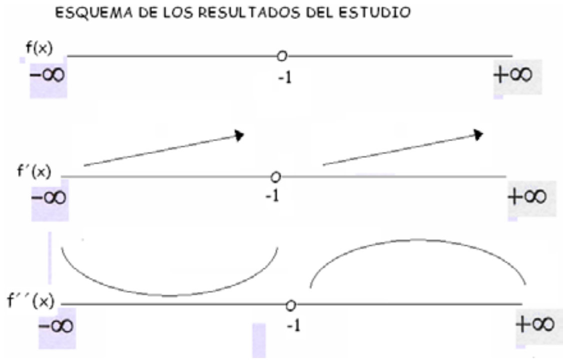
7º Gráfica:



Dibujar la gráfica de la función $y=\dfrac{2x}{x+1}$ **indicando dominio, asíntotas e intervalos de crecimiento, decrecimiento y curvatura.**

1º Dominio de f(x): $D[f(x)]=\Re-\{-1\}$

La función no existe si $x+1=0 \Rightarrow x=-1$



2ª Asíntotas:

***A.V.** : $D[f(x)]=\Re-\{-1\}$

Luego tiene como posible asíntota vertical:**¿x=-1?**

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x}{x+1}=\frac{-2}{0}$$

hay que hacer límites laterales

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to-1^-}\frac{2x}{x+1}=\frac{-2}{-0}=+\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to-1^+}\frac{2x}{x+1}=\frac{-2}{+0}=-\infty\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x}{x+1}\ No\quad existe$$

***AH.** :

A) Se calcula el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x+1}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$$ Luego **"y=2"** será una asíntota horizontal.

B) Se calcula el $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x+1}\overset{cambiamos\ x\quad por\quad -x}{\underset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{-x+1}\overset{L´Hopital}{\underset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{-1}=2$$ Luego **"y=2"** será una asíntota horizontal.

Se determina la posición relativa de la gráfica y la asíntota:

	$y=\dfrac{2x}{x+1}$	Y_1 - 2	**Situación relativa de la gráfica y la asíntota**
x=100	$y=\dfrac{2(100)}{101}=$ **1,980198**	1,980198 -2<0	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el +∞
x=-100	$y=\dfrac{2(-100)}{-100+1}=$ 2,0202020	2,0202020 -2>0	La gráfica esta por encima de la asíntota en el -∞

A.O. :No tiene porque tiene asíntota horizontal

3º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía

$$y´=\frac{(x+1).(2)-(2x).1}{(x+1)^2}=\frac{2x+2-2x}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$y´=0\quad\Rightarrow\quad 2=0\Rightarrow no\ existe\ 2\neq 0$$

$\forall x \in (-\infty,-1) \Rightarrow \quad y'(-4) > 0$ creciente

$\forall x \in (-1,+\infty) \Rightarrow \quad y'(4) < 0$ creciente

No **existe ni máximo ni mínimo relativo.**

4º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{0-2.2(x-1)}{(x+1)^4} \underset{simplificar}{=} \frac{-4}{(x+1)^3}$$

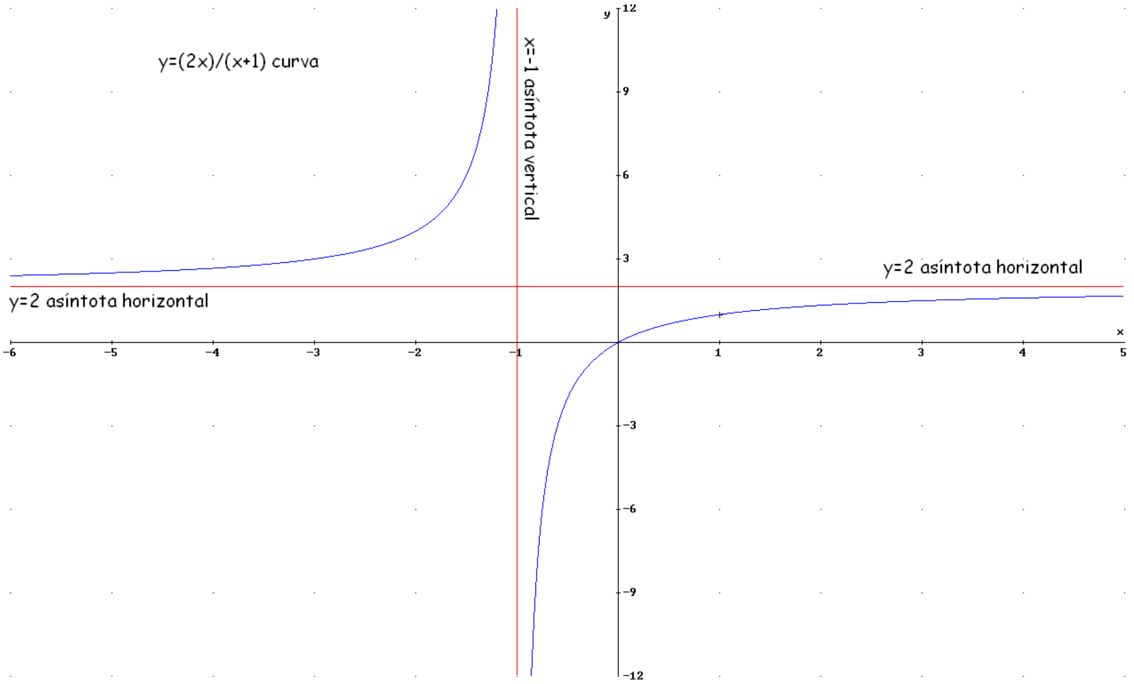
$y''=0 \quad \Rightarrow \quad -4=0 \Rightarrow \quad no \quad hay \quad solución \quad -4 \neq 0$

No tiene puntos de inflexión

$\forall x \in (-\infty,-1) \Rightarrow \quad y''(-8) > 0$ cóncava

$\forall x \in (-1,+\infty) \Rightarrow \quad y''(8) < 0$ convexa

5º Gráfica:



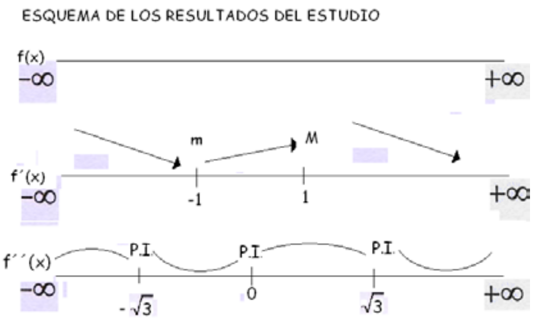
Hallar los máximos y los mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x)=\dfrac{3x^2+x+3}{x^2+1}$

1° Dominio de f(x): $D[f(x)]=\Re$

La función no existe si $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}\notin R$

2ªMonotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía



$$y´=\frac{\left(x^2+1\right)\left(6x+1\right)-\left(3x^2+x+3\right)2x}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$\frac{6x^3+6x+x^2+1-6x^3-2x^2-6x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$y´=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Rightarrow -x^2+1=0\Rightarrow x^2=1\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases}$$

$\forall x\in(-\infty,-1)\Rightarrow \quad y´(-2)<0$ decreciente

$\forall x\in(-1,1)\Rightarrow \quad y´(0)>0$ creciente

$\forall x\in(1,+\infty)\Rightarrow \quad y´(4)<0$ decreciente

En x=-1 hay un mínimo relativo (-1, 5/2)
En x=1 hay un Máximo ni mínimo relativo (1,7/2)

3º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y´´=\frac{(x^2+1)^2(-2x)-(-x^2+1).2.(x^2+1).2x}{\left(x^2+1\right)^4}$$

$$\underset{factorizar}{=}\frac{\left(x^2+1\right)\left[\left(x^2+1\right)\left(-2x\right)-4x\left(-x^2+1\right)\right]}{\left(x^2+1\right)^4}$$

$$\underset{simplificamos}{=}\frac{-2x^3-2x+4x^3-4x}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$y´´=0 \quad\Rightarrow\quad 2x\left(x^2-3\right)=0\Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=+\sqrt{3}\\x=-\sqrt{3}\end{cases}$$

$\forall x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\Rightarrow \quad y´´(-8)<0$ convexa

$\forall x\in\left(-\sqrt{3},0\right)\Rightarrow \quad y´´(-1)>0$ cóncava

$\forall x\in\left(0,\sqrt{3}\right)\Rightarrow \quad y´´(1)<0$ convexa

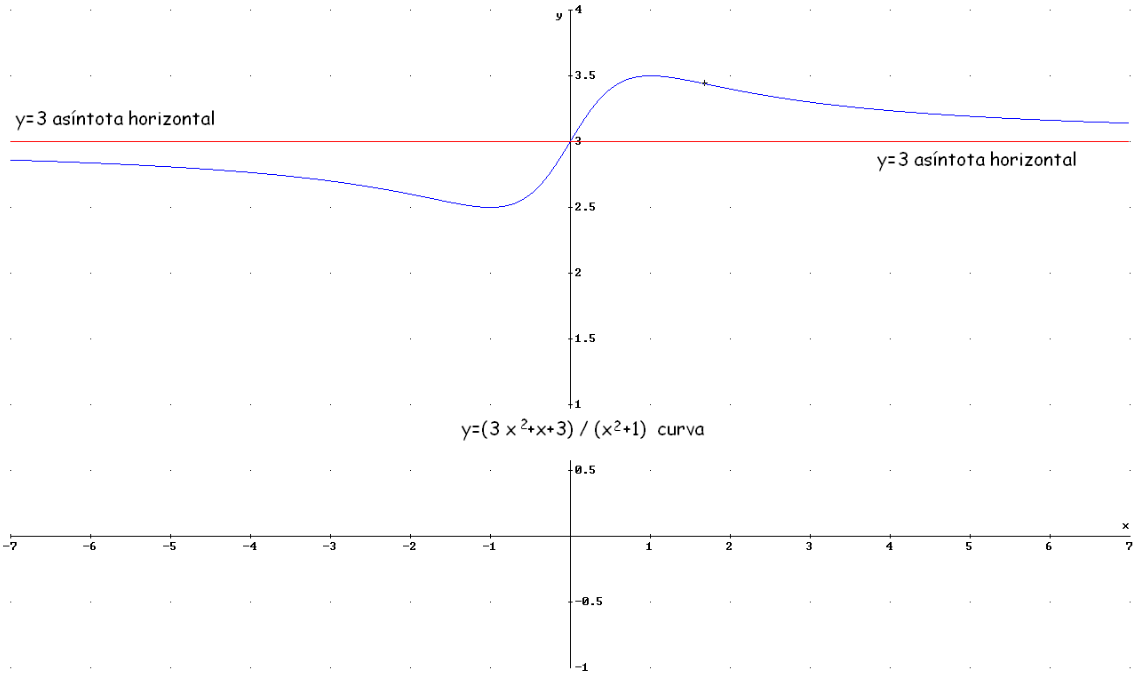
$\forall x\in\left(\sqrt{3},+\infty\right)\Rightarrow \quad y´´(8)>0$ cóncava

En (0, 3) hay un punto de Inflexión.

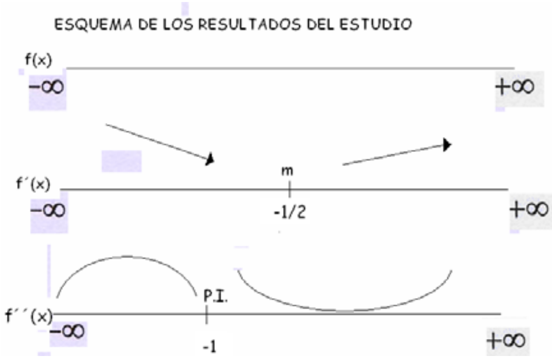
En $\left(-\sqrt{3},\dfrac{12-\sqrt{3}}{4}\right)$ hay un punto de Inflexión

En $\left(\sqrt{3}, \frac{12+\sqrt{3}}{4}\right)$ hay un punto de Inflexión

7° Gráfica:



Dada $y = x.e^{2x}$ **. Dibujar gráfica calculando dominio, asíntotas e intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad, y puntos de inflexión**



1º Dominio de f(x): $D[f(x)] = \Re$

2º Asíntotas:

***A.V.** : No tiene, la función existe $\forall x \in \Re$

***AH.** :

A) Se calcula el $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim_{x\to+\infty}\left(x.e^{2x}\right) = +\infty.e^{+\infty} = +\infty$ Luego **no hay asíntota horizontal.**

B) Se calcula el $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x.e^{2x}\right) = -\infty.e^{-\infty} = -\infty.0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(x.e^{2x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-2x}} \underset{\frac{-\infty}{\infty}}{\overset{L´Hopital}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-2.e^{-2x}} = \frac{1}{-\infty} = -0$$

Asíntota horizontal "y=0" en el -∞; la curva se encuentra por debajo de la asíntota.

***A.O.** : y= m x+n

Sólo podrá existir en el +∞

A) Cuando $x \to +\infty$

1º Se calcula **"m"**:

- $m = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x.e^{2x}}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x} = e^{+\infty} = +\infty$

Por lo tanto **no existe una asíntota oblicua en el +∞.** : curvatura + ∞ + ∞

3º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía

$$y´= e^{2x} + x.2.e^{2x} = e^{2x}(1+2x)$$

$$y´= 0 \Rightarrow 0 = 1+2x \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$$

$\forall x \in \left(-\infty, \frac{-1}{2}\right)$ $y´(-4) < 0$ decreciente

$\forall x \in \left(\frac{-1}{2}, +\infty\right) \Rightarrow$ $y´(4) > 0$ creciente

$$x = \frac{-1}{2} \quad ; f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-1}{2}.e^{2.\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{-1}{2e} \approx -0.1839 \quad \Rightarrow \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2e}\right)$$

En $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2e}\right)$ **existe un mínimo relativo.**

4º Curvatura, puntos de inflexión.

$y´´= 2.e^{2x} + (1+2x)2.e^{2x} = e^{2x}(4+4x) = 4e^{2x}(x+1)$

$y´´= 0 \Rightarrow 4e^{2x}(x+1) = 0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$

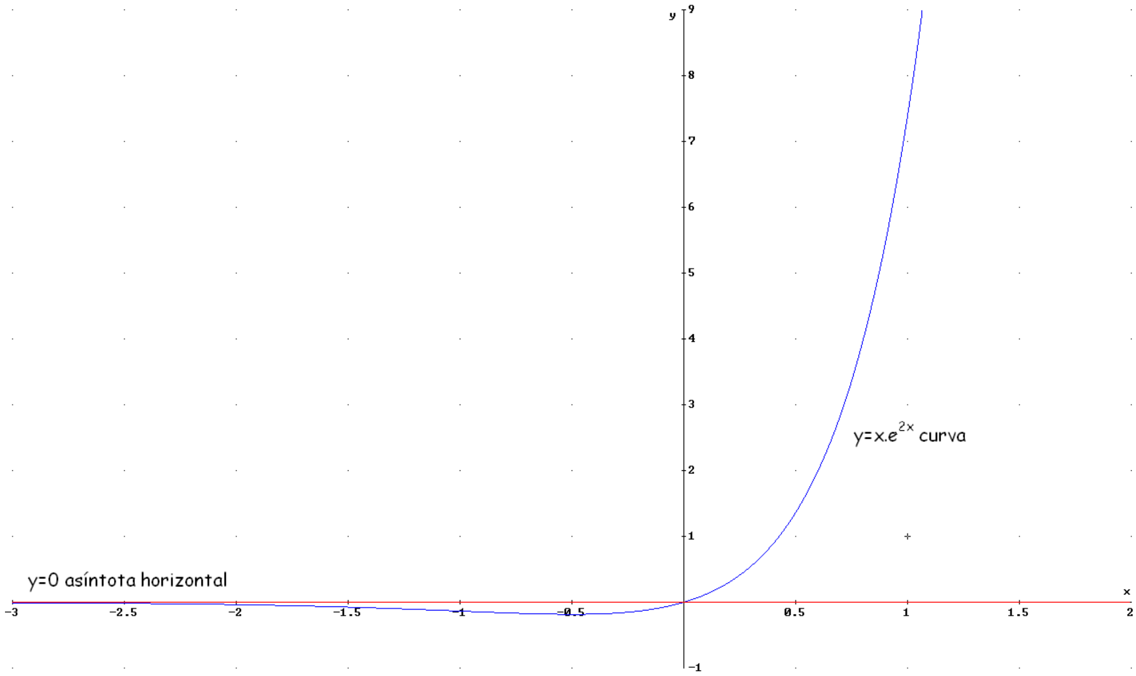
$\forall x \in (-\infty,-1) \quad y´´(-4) < 0$ convexa

$\forall x \in (1,+\infty) \Rightarrow \quad y´(4) > 0$ cóncava

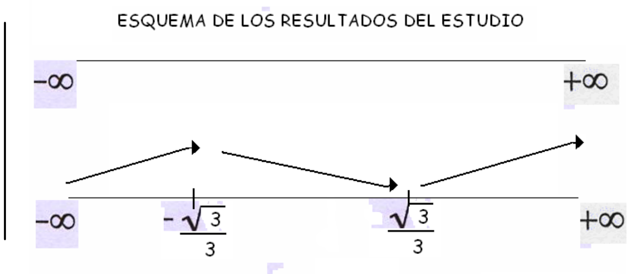
$x=-1 \quad ; f(-1) = -1.e^{-2} = \frac{-1}{e^2} \approx -0{,}1353.. \quad \left(-1\,, \frac{-1}{e^2}\right)$

Punto de inflexión. $\left(-1\,, \frac{-1}{e^2}\right)$

7º Gráfica:



Dada la función $f(x)=\dfrac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}$ **.Calcular los extremos locales y/o globales de la función f(x). Asíntotas y esboza la gráfica.**



1° Dominio de f(x): $D[f(x)]=\Re$

La función no existe si:

$$\left(1+x^2\right)^2=0 \Rightarrow 1+x^2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}\ no\ existe$$

2° Asíntotas:

***A.V.** : No tiene, la función existe $\forall x \in \Re$

***AH.** :

A) Se calcula el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L´Hopital}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{2\left(1+x^2\right)2x}=\frac{-4}{+\infty}=-0$$

Luego **"y=0" asíntota horizontal en el +∞. La curva está por debajo de la asíntota.**

B) Se calcula el $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{\substack{cambiamos \\ x\ por\ -x}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x}{\left(1+x^2\right)^2} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L´Hopital}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{2\left(1+x^2\right)2x}=\dfrac{4}{+\infty}=+0$

Luego **"y=0" asíntota horizontal en el -∞. La curva está por encima de la asíntota.**

3° Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía

$$y´=\frac{\left(1+x^2\right)^2.(-4)-(-4x).2\left(1+x^2\right)2x}{\left(1+x^2\right)^4} \underset{factorizamos}{=} \frac{\left(1+x^2\right)\left[-4-4x^2+16x^2\right]}{\left(1+x^2\right)^4} \underset{simplificamos}{=} \frac{12x^2-4}{\left(1+x^2\right)^3}$$

$$y´=0 \quad \Rightarrow 12x^2-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$\forall x \in \left(-\infty,\dfrac{-\sqrt{3}}{3}\right)$ $y´(-4)>0$ creciente $\qquad$ $\forall x \in \left(\dfrac{-\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ $y´(0)<0$ decreciente

$\forall x \in \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ $y´(10)>0$ creciente

$x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $f(-\dfrac{\sqrt{3}}{3})=\dfrac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. **En** $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ **existe un Máximo relativo relativo.**

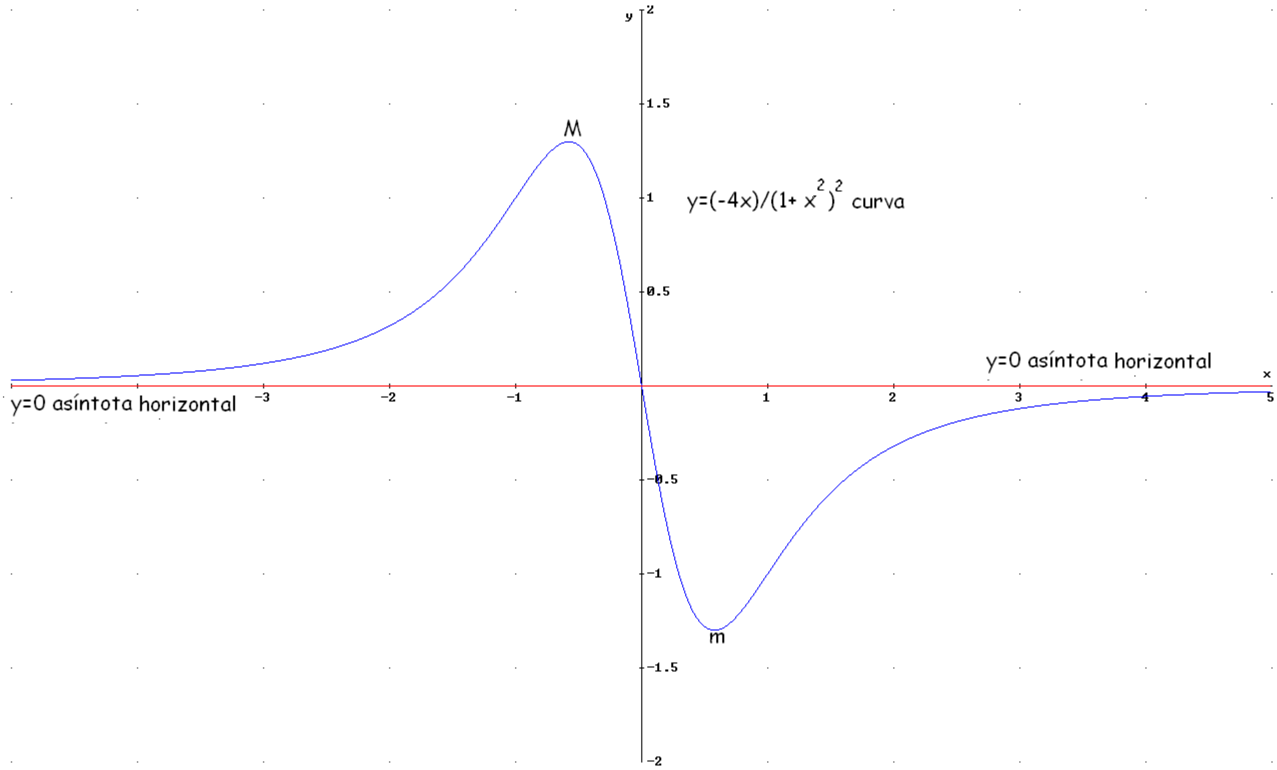
$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $f(\dfrac{\sqrt{3}}{3})=\dfrac{\frac{-4\sqrt{3}}{3}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{-3\sqrt{3}}{4}$. **En** $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{-3\sqrt{3}}{4}\right)$ **existe un mínimo relativo relativo.**

Máximos y mínimos globales $\begin{cases} si\ x\to+\infty \Rightarrow f(x)\to 0 \\ si\ x=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \quad ; f(\dfrac{\sqrt{3}}{3})=\dfrac{-3\sqrt{3}}{4} \\ si\ x=\dfrac{-\sqrt{3}}{3} \quad ; f(\dfrac{\sqrt{3}}{3})=\dfrac{3\sqrt{3}}{4} \\ si\ x\to-\infty \Rightarrow f(x)\to 0 \end{cases}$

La función tiene un máximo absoluto en $x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ **que es** $f(\frac{-\sqrt{3}}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

La función tiene un mínimo absoluto en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **que es** $f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{-3\sqrt{3}}{4}$

4º Gráfica:



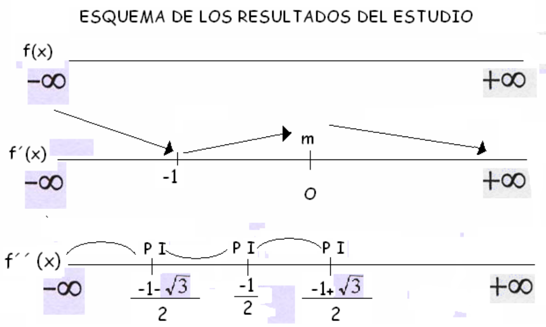
Dada la función $f(x)=\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$ **.Calcular sus máximos y mínimos relativos de la función f(x).**

Asíntotas y esboza la gráfica. (Ejercicio de selectividad y dan como dato los valores de x dónde la función tiene puntos de inflexión) Curvatura estudiada aunque no se pide.

1º Dominio de f(x): $D[f(x)]=\Re$

La función no existe si:

$$\left(x^2+x+1\right)^2=0\Rightarrow\begin{cases} x^2+x+1=0 \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}\ \textit{no existe}\end{cases}$$



2º Asíntotas:

***A.V.** : No tiene, la función existe $\forall x\in\Re$

***AH.** :

A) Se calcula el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\ \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L´Hopital}{=}}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2\left(x^2+x+1\right)(2x+1)}=\frac{2}{+\infty}=+0$$

Luego **"y=0" asíntota horizontal en el +∞. La curva está por encima de la asíntota.**

B) Se calcula el $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\ \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{\substack{cambiamos\\ x\ por\ -x}}{=}}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x+1}{\left(x^2-x+1\right)^2}\ \underset{\frac{-\infty}{\infty}}{\overset{L´Hopital}{=}}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{2\left(x^2-x+1\right)(2x-1)}=\frac{-2}{+\infty}=-0$$

Luego **"y=0" asíntota horizontal en el -∞. La curva está por debajo de la asíntota.**

3º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía

$$y´=\frac{\left(x^2+x+1\right)^2.(2)-(2x+1).2\left(x^2+x+1\right)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^4}\ \underset{factorizamos}{=}\ \frac{\left(x^2+x+1\right)\left[2\left(x^2+x+1\right)-2\left(4x^2+4x+1\right)\right]}{\left(x^2+x+1\right)^4}\ \underset{simplificamos}{=}$$

$$\frac{2x^2+2x+2-8x^2-8x-2}{\left(x^2+x+1\right)^3}=\frac{-6x^2-6x}{\left(x^2+x+1\right)^3}$$

$$y´=0\quad -6x^2-6x=0\Rightarrow -6x(x+1)=0\begin{cases}x=0\\ x=-1\end{cases}$$

$\forall x\in(-\infty,-1)\quad y´(-4)<0$ decreciente

$\forall x\in(-1,0)\quad y´(-0.5)>0$ creciente

$\forall x\in(0+\infty)\quad y´(10)<0$ decreciente

$x=0\quad ;\ f(0)=\dfrac{1}{(1)^2}=1.$ **En** $(0,1)$ **existe un Máximo relativo relativo.**

$x=-1\quad ;\ f(-1)=\dfrac{-1}{(1-1+1)^2}=-1.$ **En** $(-1,-1)$ **existe un mínimo relativo relativo.**

4º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y''=\frac{\left(x^2+x+1\right)^3.(-12x-6)-\left(-6x^2-6x\right)3\left(x^2+x+1\right)^2.(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^6}\underset{factorizamos}{=}$$

$$\frac{\left(x^2+x+1\right)^2(2x+1)\left[\left(x^2+x+1\right)(-6)-\left(-6x^2-6x\right)3.\right]}{\left(x^2+x+1\right)^6}\underset{simplificamos}{=}$$

$$\frac{(2x+1)\left(-6x^2-6x-6+18x^2+18x\right)}{\left(x^2+x+1\right)^4}=\frac{(2x+1)\left(12x^2+12x-6\right)}{\left(x^2+x+1\right)^4}$$

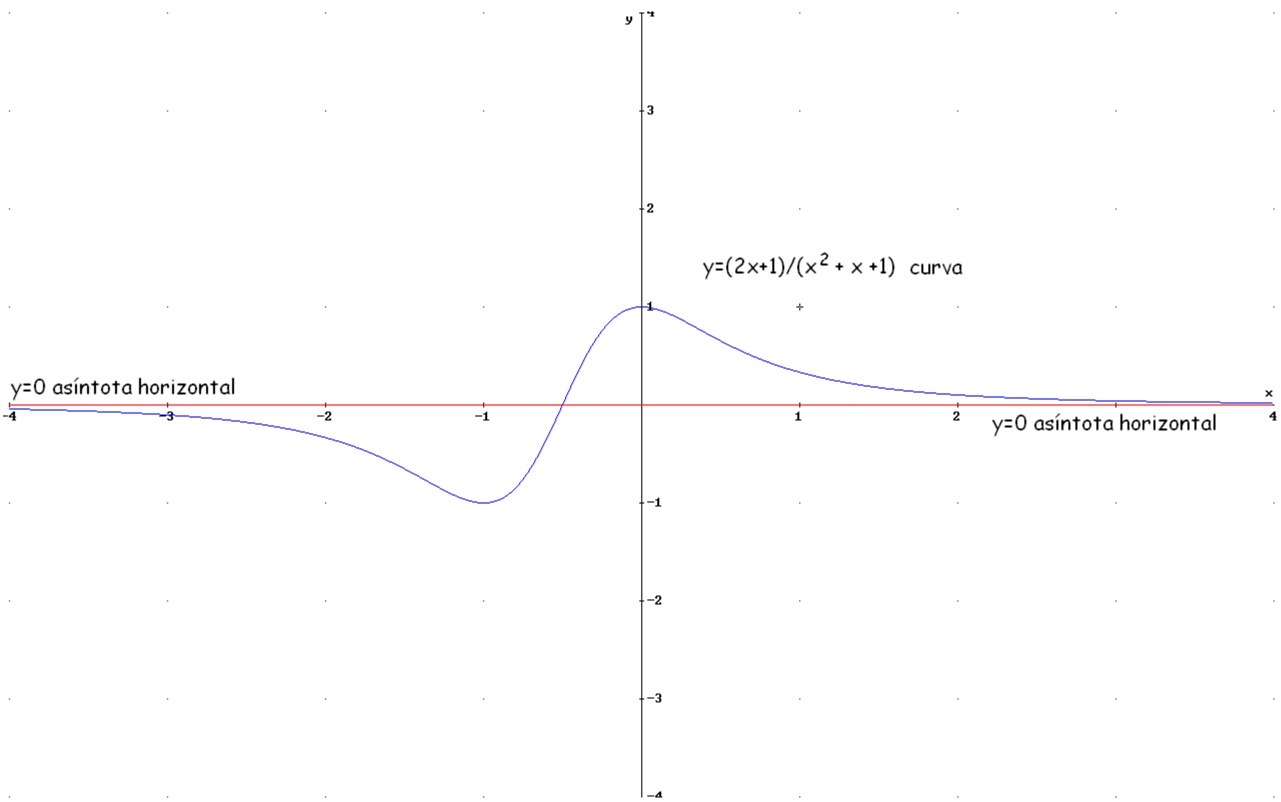
$$y''=0\Rightarrow(2x+1)\left(12x^2+12x-6\right)=0\Rightarrow\begin{cases}2x+1=0\Rightarrow x=\dfrac{-1}{2}\\ 12x^2+12x-6=0\Rightarrow 2x^2+2x-1=0\Rightarrow\\ x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+8}}{4}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-2+2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\\ x=\dfrac{-2+2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\end{cases}\end{cases}$$

$\forall x\in\left(-\infty,\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$ $y''(-4)<0$ convexa $\forall x\in\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ $y''(-1)>0$ cóncava

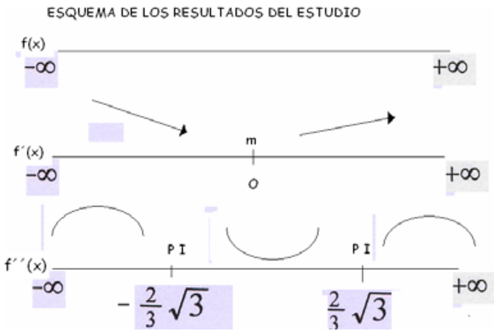
$\forall x\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$ $y''(0)<0$ convexa $\forall x\in\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$ $y''(0)<0$ cóncava

Puntos de inflexión en $x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, $x=-\dfrac{1}{2}$ *y en* $x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

4º Gráfica:



Estudio completo de $y = \frac{2x^2}{x^2+4}$



1° Dominio de f(x): $D[f(x)] = \Re$

La función no existe si

$x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4 \quad no \quad tiene \quad solucion$

2ª Cortes con los ejes:

Corte con OX: (¿,0)

0= $2x^2$, x=0; **(0,0)**

Corte con OY: (0,?)

$f(0)=o$; **(0,0)**

3° Simetrías:

$f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2+4} = \frac{2x^2}{x^2+4} = f(x)$ es una función par.

4° Asíntotas:

***A.V.** : No tiene la función siempre existe

***AH.** :

A) Se calcula el $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2+4} = \frac{\infty}{\infty} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$ Luego **"y=2"** será una asíntota horizontal.

B) Se determina la posición relativa de la gráfica y la asíntota:

	$y = \frac{2x^2}{x^2+4}$	**Y_1 - 2**	**Situación relativa de la gráfica y la asíntota**
x=100	$y = \frac{2(100)^2}{(100)^2+4} =$ 1,99920032	1,99992003-2<0	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $+\infty$
x=-100	$y = \frac{2(100)^2}{(100)^2+4} =$ 1,99920032	1,99992003-2<0	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $-\infty$

A.O. :No tiene porque tiene asíntota horizontal

5° Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía

$$y´= \frac{(x^2+4)(4x)-(2x).2x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{4x^3+16x-4x^3}{(x^2+4)^2} = \frac{+16x}{(x^2+4)^2}$$

$y´=0 \quad \Rightarrow \quad -16x=0 \Rightarrow x=0$

$\forall x \in (-\infty,0) \Rightarrow \quad y´(-4)<0$ decreciente

$\forall x \in (0,+\infty) \Rightarrow \quad y´(4)>0$ creciente

En (0,0) existe un mínimo relativo.

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y''=\frac{\left(x^2+4\right)^2.(16)-(16x).2.2x\left(x^2+4\right)}{\left(x^2+4\right)^4}\underset{factorizar}{=}\frac{\left(x^2+4\right)\left(16x^2+64-64x^2\right)}{\left(x^2+4\right)^4}=\frac{-48x^2+64}{\left(x^2+4\right)^3}$$

$$y''=0 \quad\Rightarrow\quad -48x^2+64=0\Rightarrow x^2=\frac{4}{3}\quad\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\begin{cases} x=\dfrac{-2}{3}\sqrt{3} \\ x=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\end{cases}$$

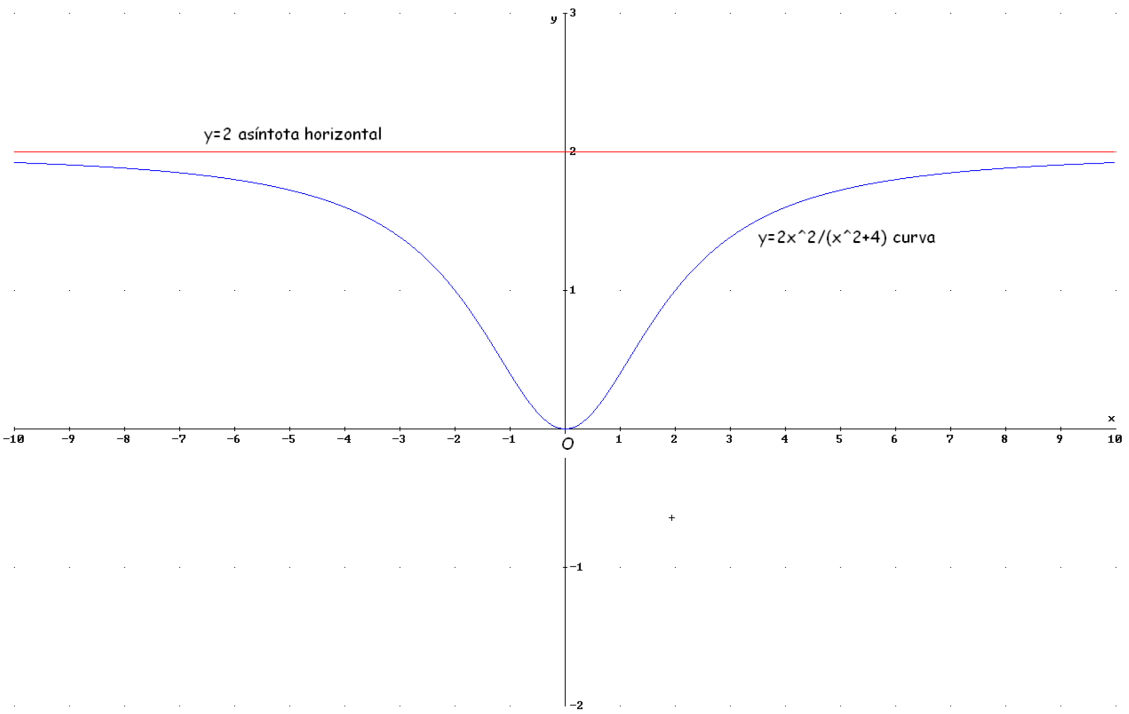
$\forall x\in\left(-\infty,\dfrac{-2}{3}\sqrt{3}\right)\Rightarrow\quad y''(-8)<0$ convexa

$\forall x\in\left(\dfrac{-2}{3}\sqrt{3},\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)\Rightarrow\quad y''(0)>0$ cóncava

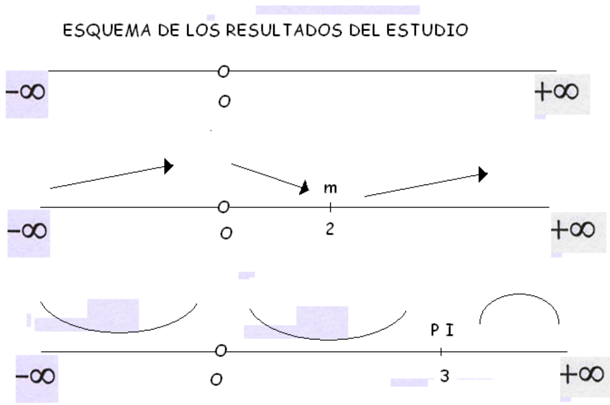
$\forall x\in\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{3},+\infty\right)\Rightarrow\quad y''(8)<0$ convexa

Puntos de inflexión: $\left(\frac{-2}{3}\sqrt{3}\,,\frac{1}{2}\right)$ **y** $\left(\frac{-2}{3}\sqrt{3}\,,\frac{1}{2}\right)$

7º Gráfica:



Estudio completo de $y = \frac{1-x}{x^2}$



1º Dominio de f(x):

$D[f(x)] = \Re - \{0\}$

La función no existe si

$x^2 = 0 \Rightarrow \quad x = 0$

2ª Cortes con los ejes:

Corte con OX: (¿,0)

0=1-x, x=1; **(1,0)**

Corte con OY: (0,?)

No corta al OY en x=0 no existe.

3º Simetrías:

$f(-x) = \frac{1-(-x)}{(-x)^2} = \frac{1+x}{x^2} \Rightarrow No \quad hay \quad simetría$

4º Asíntotas:

***A.V.** : $D[f(x)] = \Re - \{0\}$

Luego tiene como posible asíntota vertical: **¿x=0?**

¿ A.V. en x=0 ?

$\lim_{x\to 0} \frac{1-x}{x^2} = \frac{1}{+0} = +\infty$

Este límite nos sirve para determinar que **x=0** es ASÍNTOTA VERTICAL

***AH.** :

A) Se calcula el $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x}{x^2} \underset{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = -0$

Luego "**y=0**" será una ASÍNTOTA HORIZONTAL.

B) Se determina la posición relativa de la gráfica y la asíntota:

	$y = \frac{1-x}{x^2}$	**Y_1 - 0**	**Situación relativa de la gráfica y la asíntota**
x=100	$y = \frac{-99}{(100)^2} = -0{,}0099$	-0,0099-0<0	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el +∞
x=-100	$y = \frac{101}{(-100)^2} = 0{,}0101$	0,0101-0>0	La gráfica esta por encima de la asíntota en el -∞

A.O. :No tiene porque tiene asíntota horizontal

5º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{x^2.(-1)-(1-x).2x}{x^4} = \frac{-x^2-2x+2x^2}{x^4} = \frac{x^2-2x}{x^4} \underset{simplificamos}{=} \frac{x-2}{x^3}$$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$\forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow \quad y'(-4) > 0$ creciente

$\forall x \in (0, 2) \Rightarrow \quad y'(1) < 0$ decreciente

$\forall x \in (2, +\infty) \Rightarrow \quad y'(4) < 0$ creciente

En (2, $\frac{-1}{4}$) existe un mínimo relativo.

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{x^3 .1 - (x-2).3x^2}{x^6} \underset{factorizar}{=} \frac{(x^2)(x - 3x + 6)}{x^6} = \frac{-2x+6}{x^4}$$

$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

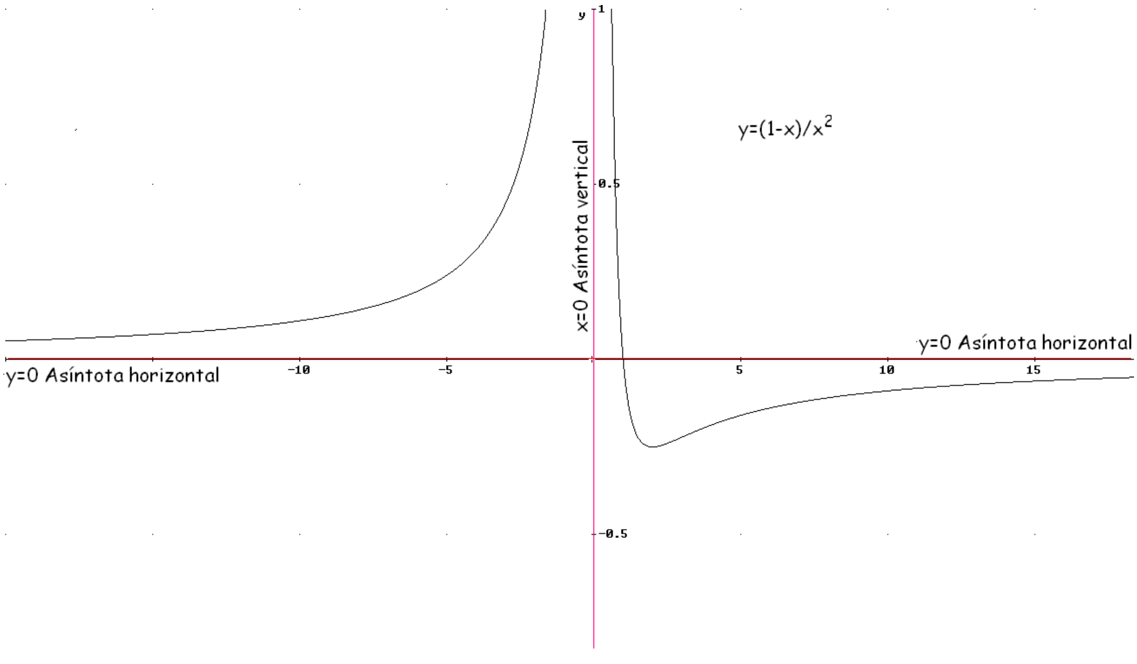
$\forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow \quad y''(-8) > 0$ cóncava

$\forall x \in (0, 3) \Rightarrow \quad y''(1) > 0$ cóncava

$\forall x \in (3, +\infty) \Rightarrow \quad y''(8) < 0$ convexa

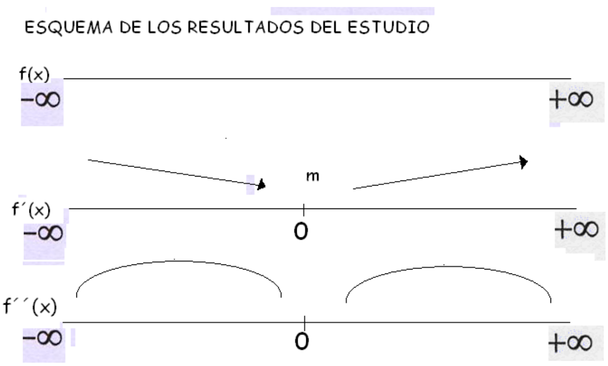
En (3, -2/9) hay un punto de Inflexión.

7º Gráfica:



Estudio completo de $y=\sqrt[3]{x^2}$ **.**

1º Dominio de f(x): $D[f(x)]=\Re$



2ª Cortes con los ejes:

Corte con OX: (¿,0)

0= $\sqrt[3]{x^2}$, x=0; **(0,0)**

Corte con OY: (0,?)

$f(0)=o$; **(0,0)**

3º Simetrías:

$f(-x)=\sqrt[3]{(-x)^2}=\sqrt[3]{x^2}=f(x)$

Es una función par.

Simétrica respecto del eje OY.

4º Asíntotas:

***A.V.** : $D[f(x)]=\Re$

Luego no tiene asíntota vertical

AH.** : **Por no ser una función del tipo** $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}\begin{cases}P(x) & polinomio\\ Q(x) & polinomio\end{cases}$ ***hay que calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ***y*** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

A) Se calcula el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{+\infty}=+\infty$ Luego **no hay asíntota horizontal.**

B) Se calcula el $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{+\infty}=+\infty$ Luego **no hay asíntota horizontal.**

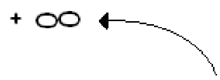
***A.O.**: y= m x+n

1º Se calcula **"m"**:

- **A)** $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{1}{+\infty}=+0$

<u>No hay asíntota oblicua pero la curvatura será</u>

- **B)** $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}\underset{x\ \ por\ \ -x}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{-x}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{-1}{+\infty}=-0$



<u>No hay asíntota oblicua pero la curvatura será</u>

5º Monotonía. Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{2x}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^2\right)^2}} = \frac{2x}{3\cdot x\cdot\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \neq 0$ luego nunca se anula la derivada y´.

Pero y' deja de existir si $\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow \quad x = 0$ y puede haber un cambio de monotonía.

$\forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow \quad y'(-15) < 0$ decreciente

$\forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow \quad y'(15) > 0$ creciente

En (0,0) existe un mínimo relativo (En este caso es un punto anguloso, y´(0) no existe).

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{2}{3}\cdot\frac{-1}{3}\cdot x^{\frac{-4}{3}} = \frac{-2}{9\cdot x\cdot\sqrt[3]{x}}$$

$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 \neq 0$ luego nunca se anula la derivada y´´.

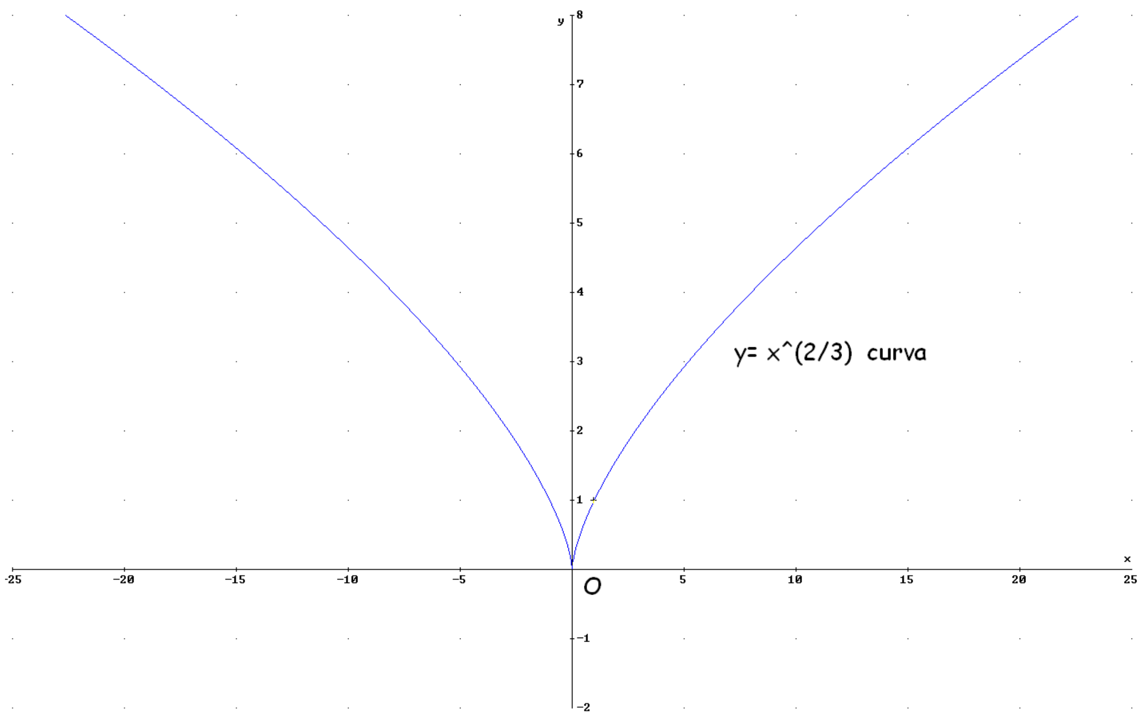
Pero y'' deja de existir si $x\cdot\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow \quad x = 0$ y podría haber un cambio de curvatura, cosa imposible en este por tener en x=0 un mínimo relativo

$\forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow \quad y''(-8) < 0$ convexa

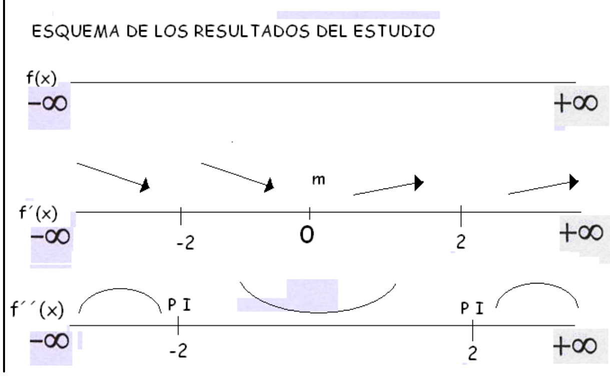
$\forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow \quad y''(1) < 0$ convexa

No hay puntos de inflexión.

7º Gráfica:



Estudio completo de $y=\sqrt[3]{x^2-4}$ **.**



1º Dominio de f(x): $D[f(x)]=\Re$

2ª Cortes con los ejes:

Corte con OX: (¿,0)

0= $\sqrt[3]{x^2-4}$, $x^2-4=0\begin{cases} x=2\Rightarrow(2{,}0) \\ x=-2\Rightarrow(-2{,}0)\end{cases}$

Corte con OY: (0,?)

$f(0)=\sqrt[3]{-4}$; **(0,** $\sqrt[3]{-4}$ **)**

3º Simetrías:

$f(-x)=\sqrt[3]{(-x)^2-4}=\sqrt[3]{x^2-4}=f(x)$

Es una función par.

Simétrica respecto del eje OY.

4º Asíntotas:

***A.V.** : $D[f(x)]=\Re$

Luego no tiene asíntota vertical

AH.** : **Por no ser una función del tipo** $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}\begin{cases} P(x) & polinomio \\ Q(x) & polinomio\end{cases}$ ***hay que calcular $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ***y*** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

A) Se calcula el $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2-4} = \sqrt[3]{+\infty}=+\infty$ Luego **no hay asíntota horizontal.**

B) Se calcula el $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2-4} = \sqrt[3]{+\infty}=+\infty$ Luego **no hay asíntota horizontal.**

***A.O.**: y= m x+n

1º Se calcula **"m"**:

\- **A)** $m=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-4}}{x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{x^3}}=\dfrac{1}{+\infty}=+0$

<u>No hay asíntota oblicua pero la curvatura será</u>

- B) $m=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-4}}{x} \underset{x \ por \ -x}{=} \lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{-x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{-x} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\frac{1}{x^3}}=\dfrac{-1}{+\infty}=-0$

$+\infty$

<u>No hay asíntota oblicua pero la curvatura será</u>

5° Monotonía. Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía $y' = \dfrac{2x}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^2}}$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad si \quad x = 0$

Pero y' deja de existir si $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \quad x = 2 \Rightarrow x = -2$ y puede haber un cambio de monotonía.

$\forall x \in (-\infty,-2) \Rightarrow \quad y'(-15) < 0$ decreciente

$\forall x \in (-2,0) \Rightarrow \quad y'(-1) < 0$ decreciente

$\forall x \in (0,2) \Rightarrow \quad y'(1) > 0$ creciente

$\forall x \in (2,+\infty) \Rightarrow \quad y'(15) > 0$ creciente

En (0, $\sqrt[3]{-4}$) existe un mínimo relativo (En este caso es un punto anguloso, y´(0) no existe).

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^2} - x \cdot \dfrac{2\left(x^2-4\right)2x}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^4}}}{\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\dfrac{3.\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^6} - 4x^2\left(x^2-4\right)}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^4}}}{\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^4}}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3.\left(x^2-4\right)^2 - 4x^2\left(x^2-4\right)}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^8}} = \frac{2}{9} . \frac{\left(x^2-4\right)[3x^2 - 12 - 4x^2]}{\left(x^2-4\right)^2 \sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^2}} =$$

$$\frac{2}{9} . \frac{[-12 - x^2]}{\left(x^2-4\right)\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^2}}$$

$\forall x \in \Re \Rightarrow y'' \neq 0 \quad -x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = -12 \Rightarrow x \notin \Re$ luego nunca se anula la derivada y´´.

Pero y'' deja de existir si $\left(x^2-4\right)\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$ y podría haber un cambio de curvatura.

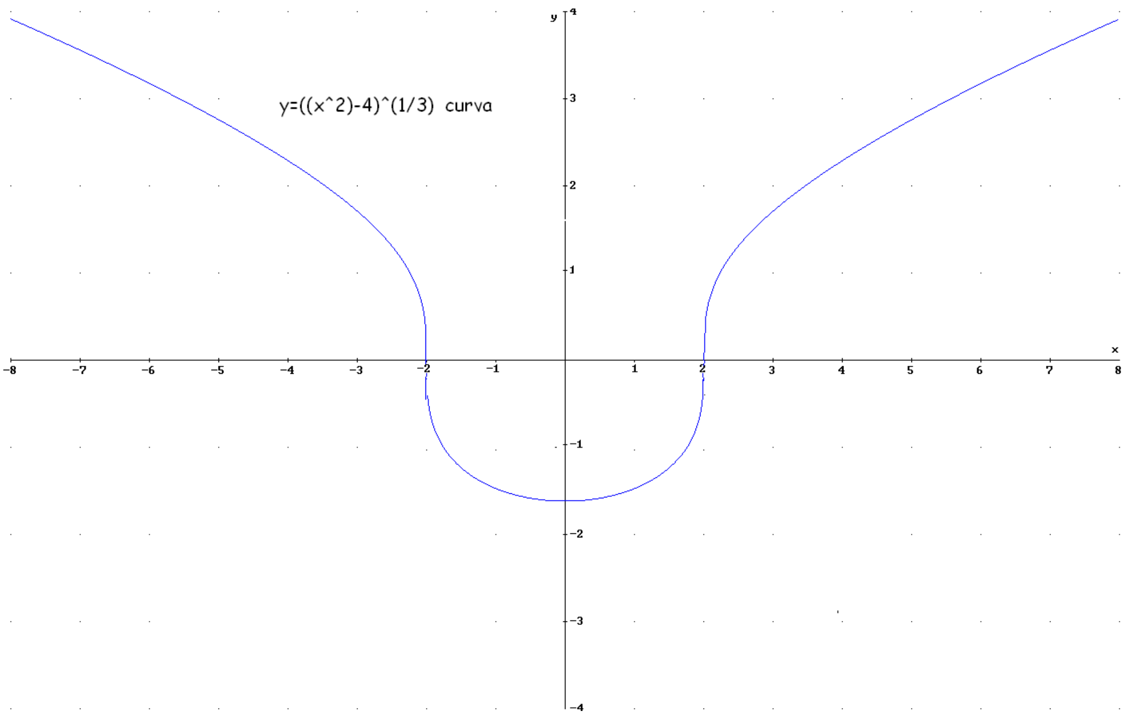
$\forall x \in (-\infty,-2) \Rightarrow \quad y''(-8) < 0$ convexa

$\forall x \in (-2,2) \Rightarrow \quad y''(0) < 0$ cóncava

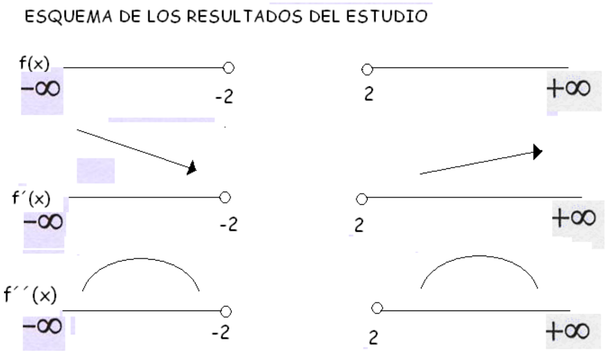
$\forall x \in (2,+\infty) \Rightarrow \quad y''(8) < 0$ convexa

Puntos de inflexión en (-2,0) y en (2,0).

7° Gráfica:


y=((x^2)-4)^(1/3) curva
y
x
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4

Estudio completo de $y=\sqrt{x^2-4}$.



1º Dominio de f(x): $D[f(x)]=\Re$

La función existe si $x^2-4>0$

$$x^2-4=0\begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

$\forall x\in(-\infty,-2)\Rightarrow \quad x^2-4>0$

$\forall x\in(-2,2)\Rightarrow \quad x^2-4<0$

$\forall x\in(2,+\infty)\Rightarrow \quad x^2-4>0$

Luego existe $\forall x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

$D[f(x)]=\Re$ -(2,2)

2ª Cortes con los ejes:

Corte con OX: (¿,0)

0= $\sqrt{x^2-4}$, $x^2-4=0\begin{cases} x=2\Rightarrow(2,0) \\ x=-2\Rightarrow(-2,0) \end{cases}$

Corte con OY: (0,?)

$f(0)=\sqrt{-4}$ no existe, no corta el OY.

3º Simetrías:

$f(-x)=\sqrt{(-x)^2-4}=\sqrt{x^2-4}=f(x)$

Es una función par.

Simétrica respecto del eje OY.

4º Asíntotas:

***A.V.** : Existe $\forall x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$, dónde toma valores reales.

Luego no tiene asíntota vertical

AH.** : **Por no ser una función del tipo** $y=\frac{P(x)}{Q(x)}\begin{cases} P(x) & polinomio \\ Q(x) & polinomio \end{cases}$ ***hay que calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ***y*** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

A) Se calcula el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-4} \quad = \quad \sqrt[3]{+\infty}=+\infty$ Luego **no hay asíntota horizontal.**

B) Se calcula el $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-4} \quad = \quad \sqrt[3]{+\infty}=+\infty$ Luego **no hay asíntota horizontal.**

***A.O**

A) **cuando** x $\to+\infty$.

1º Se calcula **"m"** :

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$$

Por lo tanto existe una asíntota oblicua y = x+n → n = y -x

2º Se calcula el **"n"**:

$$n = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-x\right) \underset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}{\sqrt{x^2-4}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-9}+x} = \frac{-4}{+\infty} = -0$$

Luego **"y=x"** será una asíntota oblicua.

Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	$y=\sqrt{x^2-4}$	Y=x	Y_1- Y_2	situación
x=100	$y_1=\sqrt{100^2-4}$ = 99,979998	$y_2=100$	$99{,}979998-100<0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $+\infty$

(como se observa en la gráfica adjunta)

B) **cuando** x →-∞.

1º Se calcula **"m"** :

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} \underset{x \ por \ -x}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{-x} \underset{\frac{\infty}{-\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{-x} = -1$$

Por lo tanto existe una asíntota oblicua y =- x+n → n = y +x

2º Se calcula el **"n"**:

$$n = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4}+x\right) \underset{x \ por \ -x}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-x\right) \underset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}{\sqrt{x^2-4}+x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x} = \frac{-4}{+\infty} = -0$$

Luego **"y=-x"** será una asíntota oblicua.

Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	$y=\sqrt{x^2-4}$	Y=-x	Y_1- Y_2	situación
x=-100	$y_1=\sqrt{(-100)^2-9}$ 99,979998	$y_2=+100$	$99{,}979998-100<0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $+\infty$

5º Monotonía. Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía $y'=\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2-4}}=\frac{x}{\cdot\sqrt{x^2-4}}$

$y'=0 \quad \Rightarrow \quad si \quad x=0 \notin$ Dominio de f(x)

Pero y' deja de existir si $x^2-4=0 \Rightarrow \quad x=2 \Rightarrow x=-2$ y no puede haber un cambio de monotonía, porque no existe a la derecha de x=-2, ni a la izquierda de x= 2.

.

$\forall x \in (-\infty,-2) \Rightarrow \quad y'(-15)<0$ decreciente

$\forall x \in (2,+\infty) \Rightarrow \quad y'(15)>0$ creciente

No hay ni máximos ni mínimos. Relativos.

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y''=\frac{\sqrt{x^2-4}-x\cdot\frac{.2x}{2\cdot\sqrt{x^2-4}}}{\sqrt{\left(x^2-4\right)^2}}=\frac{\frac{x^2-4-x^2}{\cdot\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4}=\frac{-4}{\left(x^2-4\right)\sqrt{x^2-4}}$$

$\forall x \in \Re \Rightarrow y'' \neq 0 \Rightarrow \quad -4 \neq 0$ luego nunca se anula la derivada y´´.

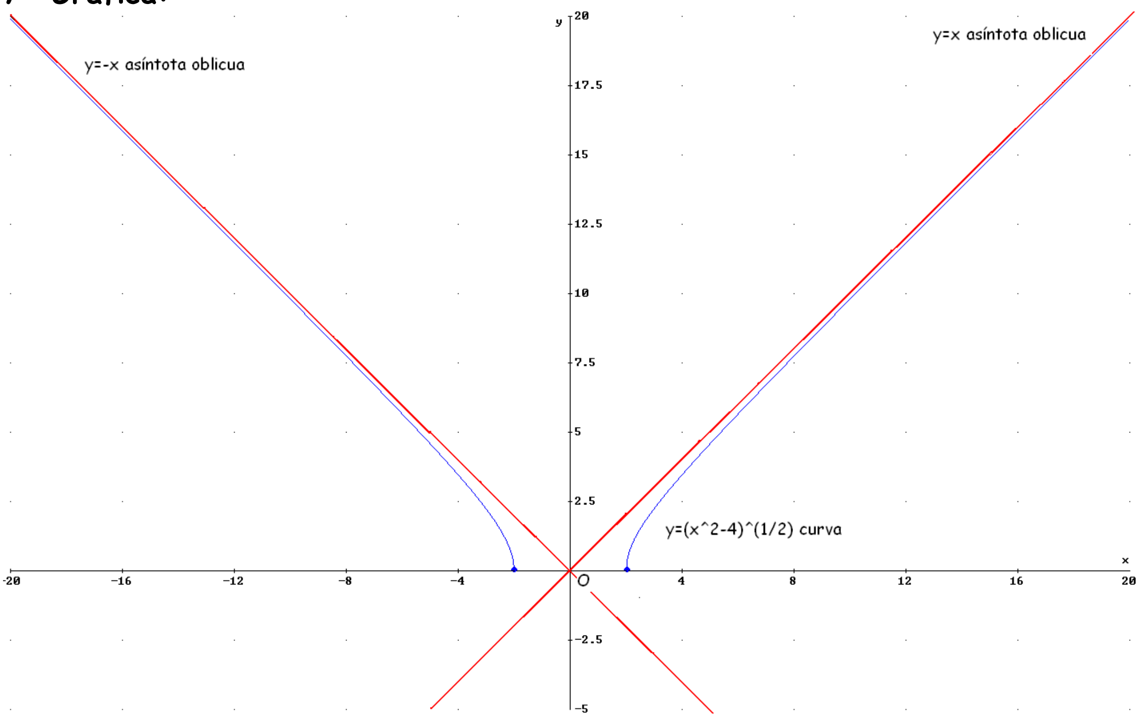
Pero y'' deja de existir si $\left(x^2-4\right)\sqrt{\left(x^2-4\right)}=0 \Rightarrow x^2-4=0\begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$ pero en estos puntos no puede haber un cambio de curvatura porque no existe a la derecha de X=-2, ni a la izquierda de x= 2.

$\forall x \in (-\infty,-2) \Rightarrow \quad y''(-8)<0$ convexa

$\forall x \in (2,+\infty) \Rightarrow \quad y''(8)<0$ convexa

Puntos de inflexión no tiene.

7º Gráfica:



Estudiar y representar gráficamente la función $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$

1º Dominio de f(x): $D[f(x)]=\Re-\{2\}$

La función no existe si

$(x-2)^2=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$

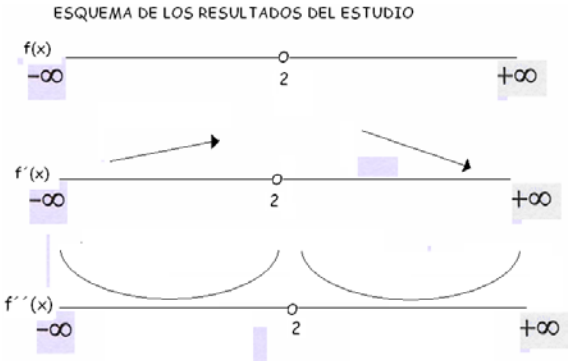
2ª Cortes con los ejes:

Corte con OX: (¿,0)

0=1, imposible no corta al OX

Corte con OY: (0,?)

$f(0)=\dfrac{1}{(-2)^2}=\dfrac{1}{4}$; **(0,1/4)**



3º Simetrías:

$f(-x)=\dfrac{1}{(-x-2)^2}=\dfrac{1}{x^2+2x+4}\begin{cases}\neq & f(x)\\ \neq & -f(x)\end{cases}$ No hay simetrias.

4º Asíntotas:

***A.V.** : $D[f(x)]=\Re-\{2\}$

Luego tiene como posible asíntota vertical: **¿x=2?**

¿ A.V. en x=2. ?

$\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{+0}=+\infty \quad \Rightarrow y=2, \quad asíntota \quad vertical$

***AH.** :

A) Se calcula el $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{+\infty}=+0$ Luego **"y=+0"** será una asíntota horizontal, y la curva está por encima de la asíntota.

B) Se calcula el $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{+\infty}=+0$ Luego **"y=+0"** será una asíntota horizontal, y la curva está por encima de la asíntota.

A.O. :No tiene porque tiene asíntotas horizontales

5º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía

$y' = \dfrac{0-(1).2(x-2)}{(x-2)^4}=\dfrac{-2(x-2)}{(x-2)^4} \underset{simplificamos}{=} \dfrac{-2}{(x-2)^3}$

$y'=0 \quad \Rightarrow \quad -2=0 \Rightarrow imposible \; -2\neq 0$

$\forall x\in(-\infty,2) \Rightarrow \quad y'(0)>0$ creciente $\nearrow$

$\forall x\in(2,+\infty) \Rightarrow \quad y'(4)<0$ decreciente $\searrow$

No existe ni Máximo ni mínimo relativo.

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{0-(-2).3.(x-2)^2}{(x-2)^6} \underset{factorizar}{=} \frac{-6(x-2)^2}{(x-2)^6} \underset{simpplificamos}{=} \frac{-6}{(x-2)^4}$$

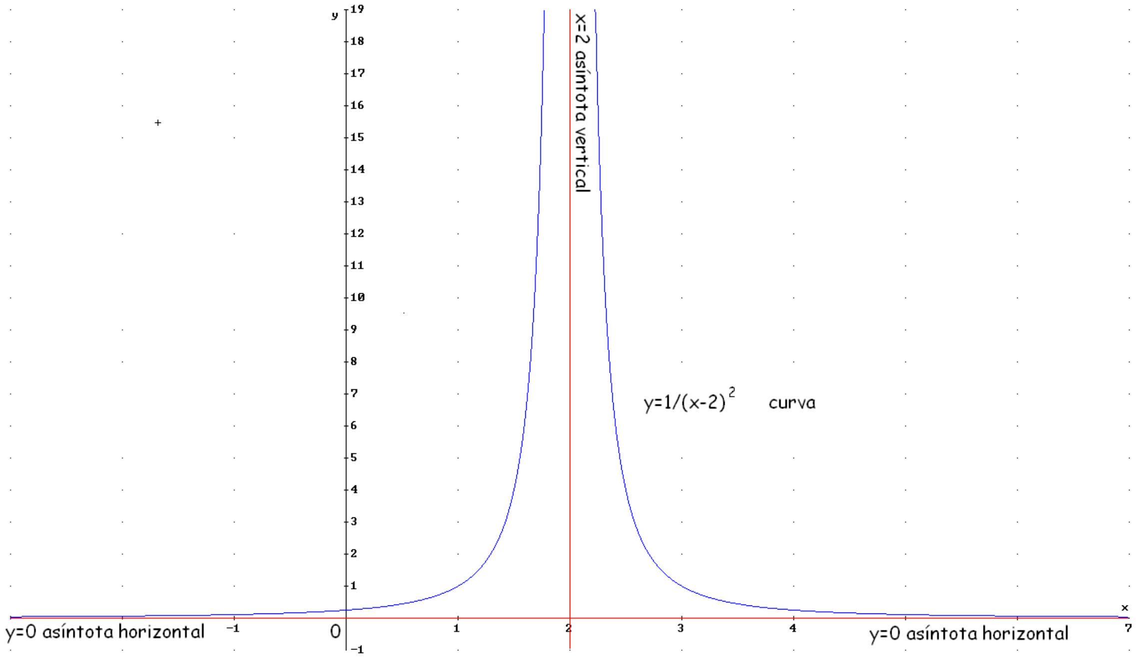
$y''=0 \quad \Rightarrow \quad -6=0 \Rightarrow \quad no \quad hay \quad solución \; -6 \neq 0$

No tiene puntos de inflexión

$\forall x \in (-\infty,2) \Rightarrow \quad y''(-8)>0$ cóncava

$\forall x \in (2,+\infty) \Rightarrow \quad y''(8)>0$ cóncava

7º Gráfica:



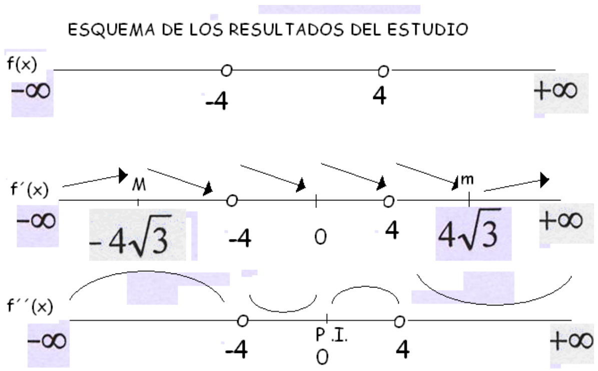
Estudio completo de $y = \dfrac{2x^3}{x^2 - 16}$.

1° Dominio de f(x):

$D[f(x)] = \Re - \{-4,4\}$

La función no existe si

$x^2 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{14}\begin{cases} x = -4 \\ x = 4 \end{cases}$



2ª Cortes con los ejes:

Corte con OX: (¿,0)

0= $2x^3$, x=0; **(0,0)**

Corte con OY: (0,?)

$f(0) = o$; **(0,0)**

3° Simetrías:

$f(-x) = \dfrac{2(-x)^3}{(-x)^2 - 16} = \dfrac{-2x^3}{x^2 - 16} = -f(x)$ es una función impar. Simétrica respecto del (0,0).

4° Asíntotas:

***A.V.** : $D[f(x)] = \Re - \{-4,4\}$

Luego tiene como posible asíntota vertical: **¿x=-4? O ¿x=4?**

A) $\lim_{x \to -4} \dfrac{2x^3}{x^2 - 16} = \dfrac{-128}{0}$ *hay que hacer límites laterales* $\begin{cases} \lim_{x \to -4^-} \dfrac{2x^3}{x^2 - 16} = \dfrac{-128}{+0} = -\infty \\ \lim_{x \to -4^+} \dfrac{2x^3}{x^2 - 16} = \dfrac{-128}{-0} = +\infty \end{cases}$

$\lim_{x \to -4} \dfrac{2x^3}{x^2 - 16}$ *No existe*

x=-4 ASÍNTOTA VERTICAL

B) $\lim_{x \to 4} \dfrac{2x^3}{x^2 - 16} = \dfrac{128}{0}$ *hay que hacer límites laterales* $\begin{cases} \lim_{x \to 4^-} \dfrac{2x^3}{x^2 - 16} = \dfrac{128}{-0} = -\infty \\ \lim_{x \to 4^+} \dfrac{2x^3}{x^2 - 16} = \dfrac{128}{0} = +\infty \end{cases}$

$\lim_{x \to 4} \dfrac{2x^3}{x^2 - 4}$ *No existe*

x=4 ASÍNTOTA VERTICAL

***AH.** :

Se calcula el $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^3}{x^2 - 16} \right) \underset{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$ Luego **no hay asíntota horizontal.**

***A.O.**: y= m x+n

1° Se calcula **"m"**:

- $m = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{2x^3}{x^2 - 16}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^3}{x^3 - 16x} \right) \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^3}{x^3 - 16x} \right) = 2$

Por lo tanto existe una asíntota oblicua y = 2x+n → n = y -2x

2º Se calcula el "**n**":

$$n = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2-16}-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-2x^3+32x}{x^2-16} = \lim_{x\to+\infty}\frac{32x}{x^2-16} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{32x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{32}{x} = \frac{32}{+\infty} = 0$$

Luego "**y= 2x**" será una asíntota oblicua.

Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	$y=\frac{2x^3}{x^2-16}$	Y=2x	Y_1- Y_2	situación
x=100	$y_1=\frac{2(100)^3}{(100)^2-16}=$ 200,1602564	$y_2=200$	$200{,}1602564-200>0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $+\infty$
x=-100	$y_1=\frac{2(-100)^3}{(100)^2-16}=$ $-200{,}1602564$	$y_2=-200$	$-200{,}1602564+200<0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $-\infty$

5º Monotonía. Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{(x^2-16)6x^2-2x^3 2x}{(x^2-16)^2} = \frac{6x^4-96x^2-4x^4}{(x^2-16)^2} = \frac{2x^4-96x^2}{(x^2-16)^2}$$

$$y'=0 \Rightarrow 2x^4-96x^2=0 \Rightarrow 2x^2(x^2-48)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4\sqrt{3} \\ x=-4\sqrt{3}\end{cases}$$

$\forall x\in(-\infty,-4\sqrt{3}) \Rightarrow\ y'(-15)>0$ creciente $\nearrow$

$\forall x\in(-4\sqrt{3},-4) \Rightarrow\ y'(-5)<0$ decreciente $\searrow$

$\forall x\in(-4\,,0) \Rightarrow\ y'(-1)<0$ decreciente $\searrow$

$\forall x\in(0\,,4) \Rightarrow\ y'(1)<0$ decreciente $\searrow$

$\forall x\in(4,\,4\sqrt{3}) \Rightarrow\ y'(5)<0$ decreciente $\searrow$

$\forall x\in(4\sqrt{3},+\infty) \Rightarrow\ y'(15)>0$ creciente $\nearrow$

En ($-4\sqrt{3}$ **,** $-6\sqrt{3}$ **) existe un máximo relativo.**

En ($4\sqrt{3}$ **,** $6\sqrt{3}$ **) existe un mínimo relativo.**

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{(x^2-16)^2.(8x^3-192x)-(2x^4-96x^2)2.2x(x^2-16)}{(x^2-16)^4} \underset{factorizar}{=}$$

$$\frac{(x^2-16)^2(8x^5-128x^3-192x^3+3072x-8x^5+384x^3)}{(x^2-16)^4} = \frac{64x^3+3072x}{(x^2-16)^3} = \frac{x(64x^2+3072)}{(x^2-16)^3}$$

$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad x(64x^2 + 3072) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 64x^2 + 3072 = 0 \quad no \quad hay \quad solución \end{cases}$$

$\forall x \in (-\infty, -4) \Rightarrow \quad y''(-8) < 0$ convexa

$\forall x \in (-4, 0) \Rightarrow \quad y''(-1) > 0$ cóncava

$\forall x \in (0, 4) \Rightarrow \quad y''(1) < 0$ convexa

$\forall x \in (4, +\infty) \Rightarrow \quad y''(8) > 0$ cóncava

En (0,0) hay un punto de inflexión.

7º Gráfica: