

Dada la función $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$. Calcular asíntotas y máximos y mínimos absolutos de la función $f(x)$.
gráfica se va a hacer aunque no nos la piden.

1° Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R}$

La función no existe si:

$$4x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{4} \text{ imposible}$$

2° Asíntotas:

*A.V. : No tiene, la función existe $\forall x \in \mathbb{R}$

*A.H. :

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 2x + 1}{4x^2 + 1} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x - 2}{8x} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{8} = 1$$

Luego "y=1" asíntota horizontal en el $+\infty$.

B) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$: por ser una función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios tendrá este

límite el mismo valor que cuando $x \rightarrow +\infty$

Luego "y=1" asíntota horizontal en el $-\infty$.

- Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota "y=1" hacemos lo siguiente:

	$y_1 = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$	Asintota $Y=1=K$	Situación relativa de la gráfica y la asíntota
$x=100$	$y_1 = f(100) = 0,99$	$y_1 - K < 0$	La gráfica está por debajo de la asíntota en el $+\infty$
$x=-100$	$y_1 = f(-100) = 1,00999\dots$	$y_1 - K > 0$	La gráfica está por encima de la asíntota en el $-\infty$

*A.O. : no hay por tener asíntotas horizontales.

3° Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{(4x^2+1)(2)(2x+1) \cdot 2 - (2x-1)^2 \cdot 8x}{(4x^2+1)^2} = \frac{4(2x-1)[4x^2+1-(2x-1)2x]}{(4x^2+1)^2} =$$

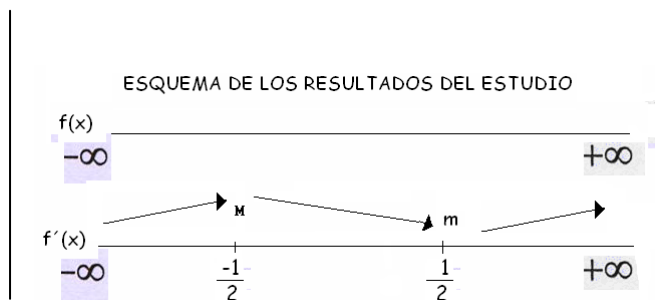
$$\frac{4(2x-1)(4x^2+1-4x^2+2x)}{(4x^2+1)^2} = \frac{4(2x-1)(2x+1)}{(4x^2+1)^2}$$

$$y' = 0 \quad 4(2x-1)(2x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=0 & x = \frac{1}{2} \\ 2x+1=0 & x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\forall x \in (-\infty, -1/2) \quad y'(-4) > 0 \text{ creciente} \rightarrow$$

$$\forall x \in (-1/2, 1/2) \quad y'(0) < 0 \text{ decreciente} \rightarrow$$

$$\forall x \in (1/2, +\infty) \quad y'(10) > 0 \text{ creciente} \rightarrow$$



$x = -\frac{1}{2}$; $f(-\frac{1}{2}) = 2$. En $(-\frac{1}{2}, 2)$ existe un Máximo relativo.

$x = \frac{1}{2}$; $f(\frac{1}{2}) = 0$. En $(\frac{1}{2}, 0)$ existe un mínimo relativo.

Para hallar los máximos y mínimos absolutos chequeamos:

1° Los valores de $f(x)$ cuando $x \rightarrow -\infty$ y $x \rightarrow +\infty$ los extremos del dominio de $f(x)$:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ para ver si son mayores o menores que los que toma la función en sus extremos relativos, aunque estos nunca serían ni máximos ni mínimos absolutos, porque nunca $f(x)$ alcanza este valor es un límite.

2° Los valores de $f(x)$ en sus extremos relativos: $f(-\frac{1}{2}) = 2$ y $f(\frac{1}{2}) = 0$

Luego entre estos tres valores 0 y 2 observamos que 2 es el máximo absoluto del recorrido de la función y 0 es el mínimo absoluto (ya sabemos que en los extremos del dominio toma el valor de 1 que es intermedio entre 0 y 2)

4° Gráfica:

