Esboza la gráfica de $y = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$ calculando dominio, simetrías, asíntotas, cortes con los ejes, monotonía, máximos y mínimos relativos.

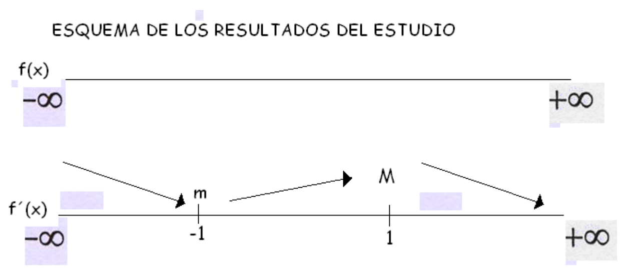
1º Dominio de f(x): $D[f(x)] = \Re$

La función no existe si $\frac{2x}{x^2+1} \notin \Re$

2º Simetrías:

$$f(-x) = e^{\frac{-2x}{x^2+1}} = \frac{1}{e^{\frac{2x}{x^2+1}}}$$

No existen simetrías.



3º Asíntotas:

***A.V.** : No tiene, la función existe $\forall x \in \Re$

***AH.** :

A) Se calcula el $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{2x}{x^2+1}}\right) = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2+1}} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2+1} \overset{L'Hopital}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{+\infty} = +0 \\ e^0 = 1 \end{cases}$$

Luego **"y=1" asíntota horizontal en el +∞.**

B) Se calcula el $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{2x}{x^2+1}}\right) = e^{\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2+1}} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x^2+1} \overset{L'Hopital}{\underset{\frac{-\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty}\dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{-\infty} = -0 \\ e^0 = 1 \end{cases}$$

Asíntota horizontal "y=1" en el -∞.

C) Se determina la posición relativa de la gráfica y la asíntota:

	$y = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$	$Y_1 - 1$	Situación relativa de la gráfica y la asíntota
x=100	$y = 1{,}02$	1,02-1 > 0	La gráfica esta por encima de la asíntota en el +∞
x=-100	$y = 0{,}98$	0,98-1 < 0	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el -∞

***A.O.** : y= m x+n

Tiene asíntota horizontal en el **+∞** y en el **-∞** por lo tanto **no existe una asíntota oblicua.**

4º Corte con OX: (¿?, 0)

$0 = e^{\frac{2x}{x^2+1}} \Rightarrow e^{\frac{2x}{x^2+1}} > 0 \quad \forall x \in \Re$ **no hay corte con OX**

Corte con OY: (0, ¿?)

$f(0) = e^{\frac{0}{1}} = e^0 = 1 \Rightarrow (0,1)$ **punto de corte con OY**

5º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{(x^2+1)2 - 2x.2x}{(x^2+1)^2} e^{\frac{2x}{x^2+1}} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} e^{\frac{2x}{x^2+1}}$$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{2x}{x^2+1}} > 0 \quad \forall x \in \Re \\ \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow -2x^2+2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \end{cases}$$

$\forall x \in (-\infty,-1) \quad y'(-4)<0$ decreciente

$\forall x \in (-1,1) \Rightarrow \quad y'(0)>0$ creciente

$\forall x \in (1,+\infty) \quad y'(4)<0$ decreciente

$x=-1 \quad ; f(-1) = e^{\frac{-2}{2}} = \frac{1}{e} \approx 0{,}368 \quad \Rightarrow \left(-1, \frac{1}{e}\right)$. **En** $\left(-1, \frac{1}{e}\right)$ **existe un mínimo relativo.**

$x=1 \quad ; f(1) = e^{\frac{2}{2}} = e \approx 2{,}72 \quad \Rightarrow (1, e)$, **En el** $(1,e)$ **existe un máximo relativo.**

6º Gráfica: