

Estudio completo de $y = \ln(x^2 + 1)$

1° Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R}$

Pues $x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2° Simetrías:

$$f(-x) = \ln[(-x)^2 + 1] = \ln(x^2 + 1) = f(x)$$

Función par (simetría con respecto a OY)

3° Asíntotas:

*A.V. : No tiene, la función existe $\forall x \in \mathbb{R}$

*A.H. :

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) = \ln(+\infty) = +\infty$$

No hay Asíntota horizontal en el $+\infty$.

B) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\text{Por ser par } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Luego no hay asíntota horizontal en el $-\infty$.

*A.O. : $y = m x + n$

A) Cuando $x \rightarrow -\infty$

1° Se calcula "m":

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\ln(x^2 + 1)}{x} \right) \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\frac{2x}{x^2 + 1}}{1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x^2 + 1} \right) = \frac{2}{+\infty} = +0$$

Por lo tanto no existe una asíntota oblicua en el $-\infty$: curvatura y tendencia

B) Cuando $x \rightarrow +\infty$

1° Se calcula "m":

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x^2 + 1)}{x} \right) \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{2x}{x^2 + 1}}{1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x^2 + 1} \right) = \frac{2}{+\infty} = +0$$

Por lo tanto no existe una asíntota oblicua en el $+\infty$: curvatura y tendencia

4° Corte con OX: (¿?, 0)

$$0 = \ln(x^2 + 1) \Rightarrow x^2 + 1 = e^0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (0,0) \text{ punto de corte con OX}$$

Corte con OY: (0, ¿?)

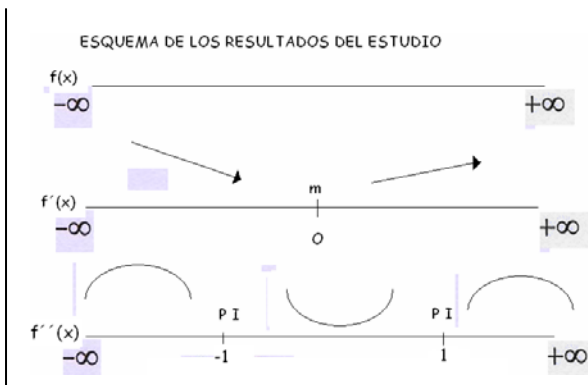
$$f(0) = \ln 1 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0,0) \text{ punto de corte con OY}$$

5° Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad y' = 0 \Rightarrow 0 = 2x \Rightarrow x = 0$$

$$\forall x \in (-\infty, 0) \quad y'(-4) < 0 \quad \text{decreciente}$$



$$\forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow y'(1) > 0 \text{ creciente} \rightarrow$$

$$x = 0 ; f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

En $(0, 0)$ existe un mínimo relativo.

6° Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{(x^2 + 1)2 - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$-2x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\forall x \in (-\infty, -1) \quad y''(-4) < 0 \quad \text{convexa}$$

$$\forall x \in (-1, 1) \quad y''(0) > 0 \quad \text{cóncava}$$

$$\forall x \in (1, +\infty) \Rightarrow y''(4) < 0 \quad \text{convexa}$$

Puntos de inflexión:

$$x = -1; f(-1) = \ln 2 \Rightarrow (-1, \ln 2)$$

$$x = 1; f(1) = \ln 2 \Rightarrow (1, \ln 2)$$

7° Gráfica:

