

Estudio completo de $y = \frac{x}{\ln x - 1}$

1º Dominio de $f(x)$:

$$D[f(x)] = \forall x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$$

Pues $\begin{cases} \ln x \in \mathbb{R} \Rightarrow x > 0 \\ y \notin \mathbb{R} \Rightarrow \ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e \end{cases}$

2º Simetrías:

$$f(-x) = \frac{-x}{\ln(-x)-1} \quad \text{No hay simetría.}$$

3º Asíntotas:

*A.V. : $D[f(x)] = \forall x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$

Possible asíntota en $x=0$?

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x - 1} = \frac{0}{-\infty} = 0 \quad \text{en } x=0 \text{ no hay asíntota vertical.}$$

Possible asíntota en $x=e$?

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{x}{\ln x - 1} = \frac{1}{0} \text{ no existe } \quad \text{pues } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{x}{\ln x - 1} = \frac{1}{-0} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{x}{\ln x - 1} = \frac{1}{+0} = +\infty \end{cases} \quad -\infty \neq +\infty \quad \text{luego } x=e \text{ es A.V.}$$

*A.H. :

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x - 1} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{No hay Asíntota horizontal en el } +\infty.$$

B) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

La función no está definida en el $-\infty$. Luego no hay asíntota horizontal en el $-\infty$.

*A.O. : $y = m x + n$

A) Cuando $x \rightarrow +\infty$

1º Se calcula "m":

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{x}{\ln x - 1}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln x - 1} \right) = \frac{1}{+\infty} = +0$$

Por lo tanto no existe una asíntota oblicua en el $+\infty$: curvatura y tendencia

B) Cuando $x \rightarrow -\infty$

La función no está definida en el $-\infty$. Luego no hay asíntota oblicua en el $-\infty$

4º Corte con OX: (¿?, 0)

$0 = x$ pero $f(x)$ no existe no hay corte

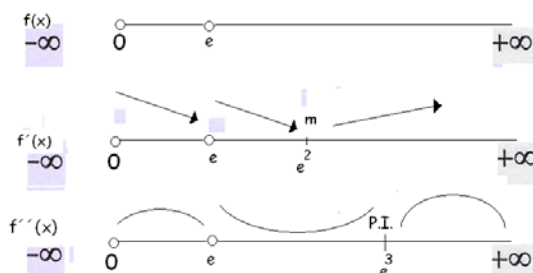
Corte con OY: (0, ¿?)

$x = 0$ pero $f(0)$ no existe no hay corte

5º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

ESQUEMA DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO



$$y' = \frac{(\ln x - 1) - x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)}{(\ln x - 1)^2} = \frac{\ln x - 2}{(\ln x - 1)^2} \quad y' = 0 \Rightarrow 0 = \ln x - 2 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$$

$$\forall x \in (0, e) \quad y' \left(\frac{1}{e}\right) < 0 \quad \text{decreciente} \quad \rightarrow$$

$$\forall x \in (e, e^2) \quad y'(2e) < 0 \quad \text{decreciente} \quad \rightarrow$$

$$\forall x \in (e^2, +\infty) \Rightarrow y'(e^3) > 0 \quad \text{creciente} \quad \rightarrow$$

$$x = e^2 \quad ; \quad f(e) = \frac{e^2}{\ln e^2 - 1} = e^2 \Rightarrow (e^2, e^2)$$

En (e^2, e^2) **existe un mínimo relativo.**

6° Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{(\ln x - 1)^2 \frac{1}{x} - (\ln x - 2) 2(\ln x - 1) \frac{1}{x}}{(\ln x - 1)^4} = \frac{(\ln x - 1) \frac{1}{x} (\ln x - 1 - 2 \ln x + 4)}{(\ln x - 1)^4}$$

sacar factor común

$$= \frac{(-\ln x + 3)}{x(\ln x - 1)^3}$$

simplificar

$$-\ln x + 3 = 0 \Rightarrow \ln x = 3 \Rightarrow x = e^3$$

$$\forall x \in (0, e) \quad y'' \left(\frac{1}{e}\right) < 0 \quad \text{convexa}$$

$$\forall x \in (e, e^3) \quad y''(e^2) > 0 \quad \text{cóncava}$$

$$\forall x \in (e^3, +\infty) \Rightarrow y''(e^4) < 0 \quad \text{convexa}$$

Puntos de inflexión:

$$x = e^3; \quad f(e^3) = \frac{e^3}{\ln e^3 - 1} = \frac{e^3}{2} \Rightarrow \left(e^3, \frac{e^3}{2}\right)$$

7° Gráfica:

