

Estudio completo de $y = \ln(x^2 - 4)$

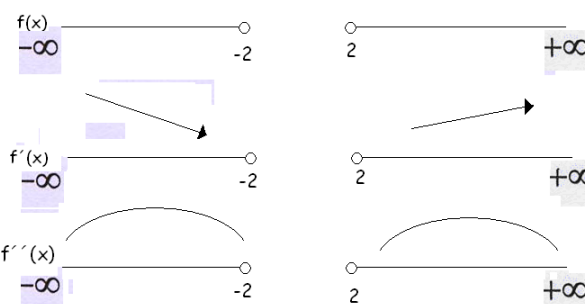
1º Dominio de $f(x)$:

$$D[f(x)] = \forall x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

Pues

$$\begin{cases} \ln(x^2 - 4) \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 - 4 > 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \begin{cases} \forall x \in (-\infty, -2) \Rightarrow x^2 - 4 > 0 \\ \forall x \in (-2, 2) \Rightarrow x^2 - 4 < 0 \\ \forall x \in (2, +\infty) \Rightarrow x^2 - 4 > 0 \end{cases}$$

ESQUEMA DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO



2º Simetrías:

$$f(-x) = \ln((-x)^2 - 4) = \ln(x^2 - 4)$$

Función par, simetría con respecto a OY.

3º Asíntotas:

***A.V. :**

Possible asíntota en $x=-2$?

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \ln(x^2 - 4) = \ln(+0) = -\infty \text{ En } x=-2 \text{ hay asíntota vertical.}$$

Possible asíntota en $x=2$?

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x^2 - 4) = \ln(+0) = -\infty \text{ En } x=2 \text{ hay asíntota vertical.}$$

***A.H. :**

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 4) = \ln(+\infty) = +\infty \text{ No hay Asíntota horizontal en el } +\infty.$$

B) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - 4) = \ln(+\infty) = +\infty \text{ No hay Asíntota horizontal en el } +\infty.$$

***A.O. : $y = m x + n$**

A) Cuando $x \rightarrow +\infty$

1º Se calcula "m":

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x^2 - 4)}{x} \right) \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{2x}{x^2 - 4}}{1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x^2 - 4} \right) \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{2x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3x^2 - 4} \right) = \frac{2}{+\infty} = +0$$

- Por lo tanto **no existe una asíntota oblicua en el $+\infty$: curvatura y tendencia**

B) Cuando $x \rightarrow -\infty$

***A.O. : $y = m x + n$**

A) Cuando $x \rightarrow +\infty$

1º Se calcula "m":

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\ln(x^2 - 4)}{x} \right) \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\frac{2x}{x^2 - 4}}{1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{x^3 - 4x} \right) \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{3x^2 - 4} \right) \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{3x^2 - 4} \right) = \frac{2}{+\infty} = +0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{3x^2 - 4} \right) = \frac{2}{+\infty} = +0$$

Por lo tanto **no existe una asíntota oblicua en el $-\infty$** : curvatura y tendencia $+\infty \leftarrow$ $-\infty \leftarrow$

4° Corte con OX: (¿?, 0)

$$0 = \ln(x^2 - 4) \Rightarrow x^2 - 4 = 1 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = +\sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases} \text{ puntos de corte: } \begin{matrix} (-\sqrt{5}, 0) \\ (\sqrt{5}, 0) \end{matrix}$$

Corte con OY: (0, ¿?)

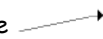
$x = 0$ pero $f(0)$ no existe **no hay corte**

5° Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{2x}{x^2 - 4} \quad y' = 0 \Rightarrow 0 = 2x \Rightarrow x = 0 \notin D[f(x)] \text{ No hay ni máximos ni mínimos relativos}$$

$\forall x \in (-\infty, -2) \quad y'(-4) < 0$ decreciente 

$\forall x \in (2, +\infty) \quad y'(4) > 0$ creciente 

6° Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{(x^2 - 4)2 - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-2x^2 - 8}{(x^2 - 4)^2} \Rightarrow y'' \neq 0 \text{ porque } -2x^2 - 8 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

No hay puntos de inflexión.

$\forall x \in (-\infty, -2) \quad y''(-4) < 0$  **convexa**

$\forall x \in (2, +\infty) \quad y''(4) < 0$  **convexa**

7° Gráfica:

