

Dada la función $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$. Calcular los extremos locales y/o globales de la función $f(x)$.

Asíntotas y Esboza la gráfica.

1° Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R}$

La función no existe si:

$$(1+e^x)^2 = 0 \Rightarrow 1+e^x = 0 \Rightarrow e^x = -1 \text{ no es posible}$$

2° Asíntotas:

***A.V. :** No tiene, la función existe $\forall x \in \mathbb{R}$

***A.H. :**

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2(1+e^x)e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(1+e^x)} = \frac{1}{+\infty} = +0$

Luego " $y=0$ " asíntota horizontal en el $+\infty$. La curva está por encima de la asíntota.

B) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{+0}{1} = +0$

Luego " $y=0$ " asíntota horizontal en el $-\infty$. La curva está por encima de la asíntota.

3° Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{(1+e^x)^2 \cdot e^x - e^x \cdot 2(1+e^x)e^x}{(e^x+1)^4} \stackrel{\text{factorizamos}}{=} \frac{(1+e^x)e^x[(1+e^x) - 2e^x]}{(e^x+1)^4} \stackrel{\text{simplificamos}}{=} \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

$$y' = 0 \Rightarrow e^x(1-e^x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x \neq 0 \\ 1-e^x = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in (-\infty, 0) \quad y'(-4) > 0 \quad \text{creciente} \rightarrow$$

$$\forall x \in (0, +\infty) \quad y'(0) < 0 \quad \text{decreciente} \rightarrow$$

$$x = 0 ; f(0) = \frac{e^0}{(1+e^0)^2} = \frac{1}{4}$$

En $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ existe un Máximo relativo relativo.

$$\text{Máximos y mínimos globales} \begin{cases} \text{si } x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0 \\ \text{si en } x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{4} \\ \text{si } x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0 \end{cases}$$

La función tiene un máximo absoluto $f(0)=1/4$ y no tiene mínimo absoluto $\rightarrow 0$, pero nunca toma ese valor

4° Gráfica:

