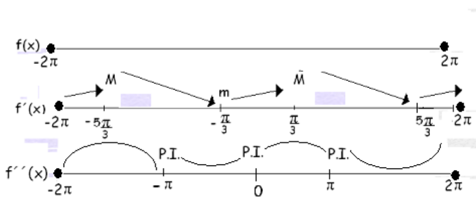
Dada la función $f(x)=\dfrac{sen\ x}{2-\cos x}$ **. Calcular los extremos relativos y/o absolutos de la función en el cerrado [-π, π].Calcular su curvatura y puntos de Inflexión.**

Esboza la gráfica.

ESQUEMA DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO



1º Dominio de f(x): $D[f(x)]=\Re$

La función no existe si:

$2-\cos x=0\Rightarrow \cos x=2\Rightarrow\ no\ existe$

2º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía

$$y´=\frac{(2-\cos x).(\cos x)-(sen\ x).(0+sen\ x)}{(2-\cos x)^2}=\frac{2\cos x-\cos^2 x-sen^2 x}{(2-\cos x)^2}=\frac{2\cos x-(\cos^2 x+sen^2 x)}{(2-\cos x)^2}=\frac{2\cos x-1}{(2-\cos x)^2}$$

$$y´=0\quad\Rightarrow 2\cos x-1=0\Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\arccos\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=60^0+360n=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\begin{cases}k=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{3}\\ k=-1\Rightarrow x=-\dfrac{5\pi}{3}\end{cases}\\ x=300+360n=\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi\begin{cases}k=0\Rightarrow x=\dfrac{5\pi}{3}\\ k=-1\Rightarrow x=-\dfrac{\pi}{3}\end{cases}\end{cases}$$

$\forall x\in\left(-2\pi,\dfrac{-5\pi}{3}\right),\quad y´(-330^0)>0$ creciente

$\forall x\in\left(\dfrac{-5\pi}{3},-\dfrac{\pi}{3}\right)\quad y´(-180^0)<0$ decreciente

$\forall x\in\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)\quad y´(0)>0$ creciente

$\forall x\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3}\right)\quad y´(180^0)<0$ decreciente

$\forall x\in\left(\dfrac{5\pi}{3},2\pi\right)\quad y´(330^0)>0$ creciente

En $\left(\dfrac{-5\pi}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ***existe un Máximo relativo.*** ***En*** $\left(\dfrac{-\pi}{3},\dfrac{-\sqrt{3}}{3}\right)$ ***existe un mínimo relativo.***

En $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ***existe un Máximo relativo.*** ***En*** $\left(\dfrac{5\pi}{3},\dfrac{-\sqrt{3}}{3}\right)$ ***existe un mínimo relativo***

3.- Máximos y mínimos globales:

Máximos y mínimos globales $\begin{cases}si\ x=-2\pi\Rightarrow f(-2\pi)=0\\ si\ x=\dfrac{-5\pi}{3}\Rightarrow f(\dfrac{-5\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ si\ x=\dfrac{-\pi}{3}\Rightarrow f(\dfrac{-\pi}{3})=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}\\ si\ x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow f(\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ si\ x=\dfrac{5\pi}{3}\Rightarrow f(\dfrac{5\pi}{3})=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}\\ si\ x=2\pi\Rightarrow f(2\pi)=0\end{cases}$

Máximo absoluto (global) $f(\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **,** $f(\dfrac{-5\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Mínimo absoluto (global) $f(\dfrac{-\pi}{3})=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$ **,** $f(\dfrac{5\pi}{3})=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$

4° Curvatura.

$$y'' = \frac{(2-\cos x)^2.(-2sen\ x) - (2\cos x - 1).2(2-\cos x)(sen\ x)}{(2-\cos x)^4} \underset{simplificamos}{=}$$

$$\frac{(2-\cos x)2.(sen\ x)[(2-\cos x)(-1) - (2\cos x - 1)]}{(2-\cos x)^4} = \frac{(2sen\ x)(-2+\cos x - 2\cos x + 1)}{(2-\cos x)^3}$$

$$= \frac{(2sen\ x)(-1-\cos x)}{(2-\cos x)^3}$$

$$y''=0 \Rightarrow (2sen\ x)(-1-\cos x)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2senx = 0 \Rightarrow x = arcsen0 = \left\{ x = 180n \Rightarrow x = k\pi \begin{cases} k=0 \Rightarrow x=0 \\ k=1 \Rightarrow x=\pi \\ k=-1 \Rightarrow x=-\pi \end{cases} \right. \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = \arccos(-1) = \left\{ x = 180 + 360n \Rightarrow x = \pi + 2k\pi \begin{cases} k=0 \Rightarrow x=\pi \\ k=-1 \Rightarrow x=-\pi \end{cases} \right. \end{cases}$$

$\forall x \in (-2\pi, -\pi),\quad y''(-270^0) < 0$ convexa

$\forall x \in (-\pi, 0),\quad y''(-90^0) > 0$ cóncava

$\forall x \in (0, \pi),\quad y''(90^0) < 0$ convexa

$\forall x \in (\pi, 2\pi),\quad y''(270^0) > 0$ cóncava

En (-π , 0) hay un punto de Inflexión.
En (0 , 0) hay un punto de Inflexión.
En (π , 0) hay un punto de Inflexión.

5.- Gráfica