

## Estudio completo de $y = \frac{\ln x}{x}$

### 1° Dominio de $f(x)$ :

$$D[f(x)] = \forall x \in (0, +\infty)$$

Pues  $\begin{cases} \ln x \in \mathbb{R} \Rightarrow x > 0 \\ y \notin \mathbb{R} \Rightarrow x = 0 \end{cases} \Rightarrow \forall x \in (0, +\infty)$

### 2° Simetrías:

$$f(-x) = \frac{\ln(-x)}{-x} \Rightarrow \ln(-x) \text{ no existe}$$

No hay simetría.

### 3° Corte con OX: (¿?, 0)

$$0 = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow x = e^0; x = 1; (1, 0)$$

### Corte con OY: (0, ¿?)

$x = 0$  pero  $f(0)$  no existe **no hay corte**

### 4° Asíntotas:

\*A.V. :  $D[f(x)] = \forall x \in (0, +\infty)$

Possible asíntota en  $x=0$ ?

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \text{ en } x=0^+ \text{ hay asíntota vertical.}$$

\*A.H. :

A) Se calcula el  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = +0 \quad y=0 \text{ Asíntota horizontal en el } +\infty.$$

B) Se calcula el  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

La función no está definida en el  $-\infty$ . Luego **no hay asíntota horizontal en el  $-\infty$ .**

\*A.O. : Cuando  $x \rightarrow \infty$  **No existe una asíntota oblicua, pues hay horizontal.**

B) Cuando  $x \rightarrow -\infty$

La función no está definida en el  $-\infty$ . Luego **no hay asíntota oblicua en el  $-\infty$ .**

### 4° Corte con OX: (¿?, 0)

$0 = x$  pero  $f(x)$  no existe **no hay corte**

### Corte con OY: (0, ¿?)

$x = 0$  pero  $f(0)$  no existe **no hay corte**

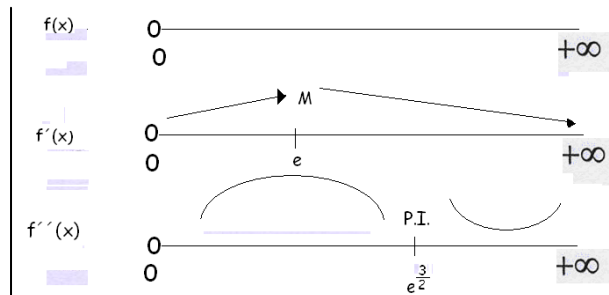
### 5° Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos  $y' = 0$  para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad y' = 0 \Rightarrow 0 = 1 - \ln x \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

$$\forall x \in (0, e) \quad y'(1) > 0 \text{ creciente} \rightarrow$$

$$\forall x \in (e, +\infty) \quad y'(2e) < 0 \text{ decreciente} \rightarrow$$



En  $x = e$  ;  $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} \Rightarrow \left(e, \frac{1}{e}\right)$

En  $\left(e, \frac{1}{e}\right)$  existe un máximo relativo.

**6º Curvatura, puntos de inflexión.**

$$y'' = \frac{x^2 \left(0 - \frac{1}{x}\right) - (1 - \ln x)2x}{x^4} \underset{\text{sacar factor común}}{=} \frac{x(-1 - 2 + 2 \ln x)}{x^4}$$

$$\underset{\text{simplificar}}{=} \frac{(-3 + 2 \ln x)}{x^3}$$

$$-3 + 2 \ln x = 0 \Rightarrow 2 \ln x = 3 \Rightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$$

$$\forall x \in \left(0, e^{\frac{3}{2}}\right) \quad y''(e) < 0 \quad \text{convexa}$$

$$\forall x \in \left(e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right) \quad y''(e^3) > 0 \quad \text{cóncava}$$

**Puntos de inflexión:**

$$x = e^{\frac{3}{2}} \quad f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\ln e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$$

**7º Gráfica:**

