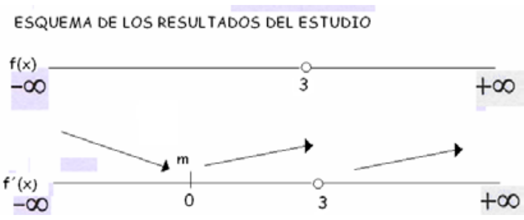
Esboza la gráfica de $y=\dfrac{x^2}{|x-3|}$ **calculando el dominio, asíntotas, monotonía, máximos y mínimos relativos**

1º Dominio de f(x): $D[f(x)]=\Re-\{3\}$

La función: $y=\dfrac{x^2}{|x-3|}=\begin{cases}\dfrac{x^2}{-x+3} & si \quad x\le 3\\ \dfrac{x^2}{x-3} & si \quad x>3\end{cases}$

La función no existe si $x-3=0 \;\Rightarrow\; x=3$



2º Asíntotas:

***A.V.** : $D[f(x)]=\Re-\{3\}$

A) Luego tiene como posible asíntota vertical: ¿ $x=3$?

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2}{|x-3|}=\dfrac{2}{+0}=+\infty$ Asíntota vertical: $x=3$

***AH**:

A) Se calcula el $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{-x+3}\underset{\substack{Cambiamos\\ x\quad por:-x}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x+3}\overset{L´Hopital}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{1}=+\infty$ **Luego no hay asíntota horizontal en el -∞**

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x-3}\overset{L´Hopital}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{1}=+\infty$ **Luego no hay asíntota horizontal en el +∞**

***A.O.** : y= m x+n

Si x→-∞

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{-x+3}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{-x^2+3x}\underset{\substack{Cambiamos\\ x\quad por:-x}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-x^2-3x}\overset{L´Hopital}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{-2x-3}\overset{L´Hopital}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{-2}=-1 \qquad Luego \qquad y=-x+n\Rightarrow n=\lim_{x\to+\infty}(y+x)$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{-x+3}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2+3x}{-x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{+3x}{-x+3}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\substack{Cambiamos\\ x\quad por:-x}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x}{x+3}\overset{L´Hopital}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{-3}{1}=-3$$

Luego hay asíntota oblicua en el -∞ que será y= -x-3

Si x→+∞

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x-3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-3x}\overset{L´Hopital}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x-3}\overset{L´Hopital}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2}=1$$

$$Luego \qquad y=x+n\Rightarrow n=\lim_{x\to+\infty}(y-x)$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x-3}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2+3x}{x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{+3x}{x-3}\overset{L´Hopital}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{1}=+3$$

Luego hay asíntota oblicua en el -∞ que será y= x+3

Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	$y_1=\frac{x^2}{-x+3}$	Y_2=-x-3	Y_1- Y_2	Situación
x=-100	y_1= **97.08737**	$y_2=97$	$\mathbf{97.08737}-97>0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el -∞
	$y_1=\frac{x^2}{x-3}$	Y_2=x+3	Y_1- Y_2	Situación
x=100	y_1= **103.0927835**	$y_2=103$	**103.0927835-103>0**	La gráfica esta por encima de la asíntota en el +∞

3º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía

Si x < 3	Si x > 3	Si x=3
$y´=\frac{(-x+3)(2x)-(x^2)(-1)}{(-x+3)^2}=$ $\frac{-2x^2+6x+x^2}{(-x+3)^2}=\frac{-x^2+6x}{(-x+3)^2}$	$y´=\frac{(x-3)(2x)-(x^2)(1)}{(x-3)^2}=$ $\frac{2x^2-6x-x^2}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x}{(-x+3)^2}$	No existe y´(3) Porque no existe Y(3)

$$y´=\begin{cases}\frac{-x^2+6x}{(-x+3)^2} & si \quad x<3\\ \frac{x^2-6x}{(-x+3)^2} & si \quad x>3\end{cases}$$

$si \quad x<3$

$$y´=0 \quad -x^2-6x=0 \Rightarrow x(-x+6)=0 \quad \begin{cases} x=0 & posible \quad extremo \quad relativo\\ x=6>3\end{cases}$$

$si \quad x>3$

$$y´=0 \quad x^2-6x=0 \Rightarrow x(x-6)=0 \quad \begin{cases} x=0<3 \\ x=6 & posible \quad extremo \quad relativo\end{cases}$$

Pero puede tener un máximo o un mínimo en x=0 pues no existe y´ (0).

$\forall x \in (-\infty,0) \Rightarrow \quad y´(-4)<0$ decreciente

$\forall x \in (0,3) \Rightarrow \quad y´(1)>0$ creciente

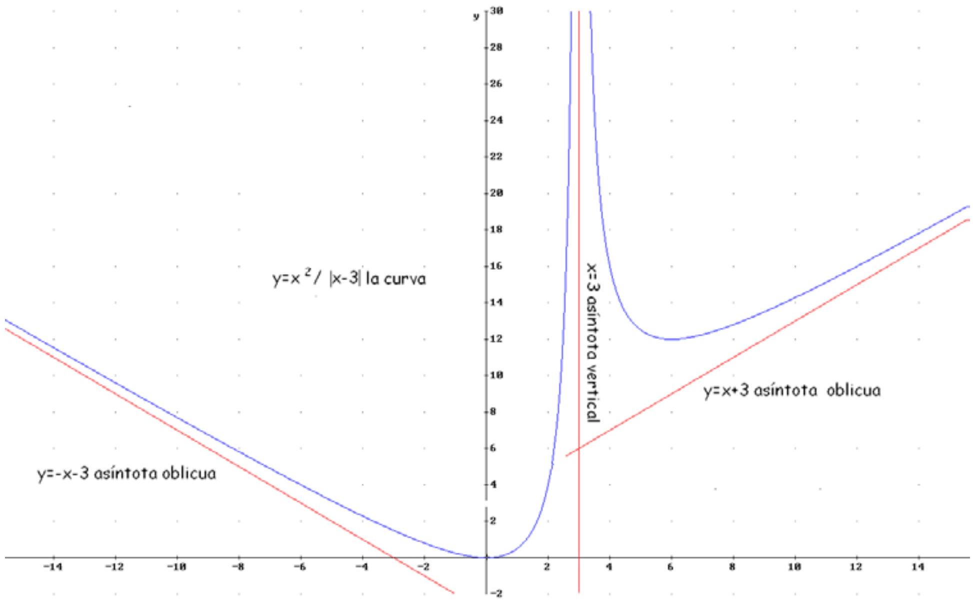
$\forall x \in (3,6) \Rightarrow \quad y´(4)<0$ decreciente

$\forall x \in (6,+\infty) \Rightarrow \quad y´(7)>0$ creciente

$x=0 \quad f(0)=\frac{0}{3}=0$ **En (0,0) existe un mínimo relativo**

$x=6 \quad f(6)=\frac{36}{3}=12$ **En (6,12) existe un mínimo relativo**

4º Gráfica:


y=x ² / |x-3| la curva
x=3 asíntota vertical
y=x+3 asíntota oblicua
y=-x-3 asíntota oblicua