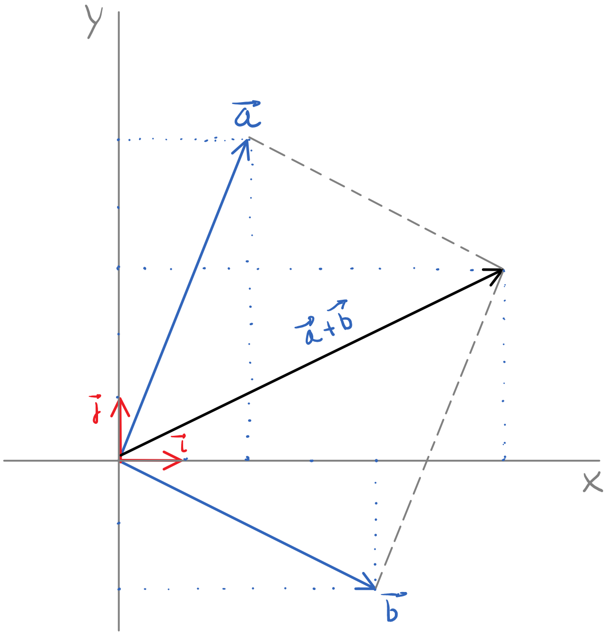
1. Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$ y $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$
    a. Calcula el vector suma. Representa ambos vectores y comprueba que el resultado obtenido coincide con el obtenido por la regla del paralelogramo.
    b. Calcula el vector diferencia $\vec{a} - \vec{b}$ y comprueba que coincide en módulo con la diagonal opuesta del paralelogramo formado por ellos.

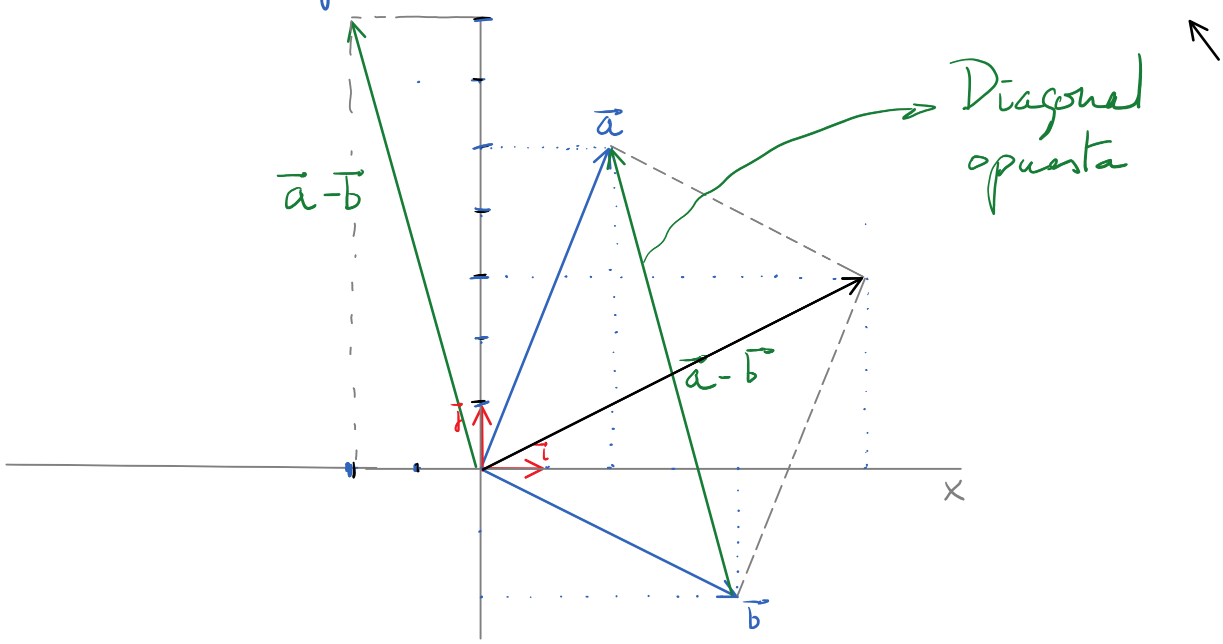
$\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$

$\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$

a) $\vec{a} + \vec{b} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$

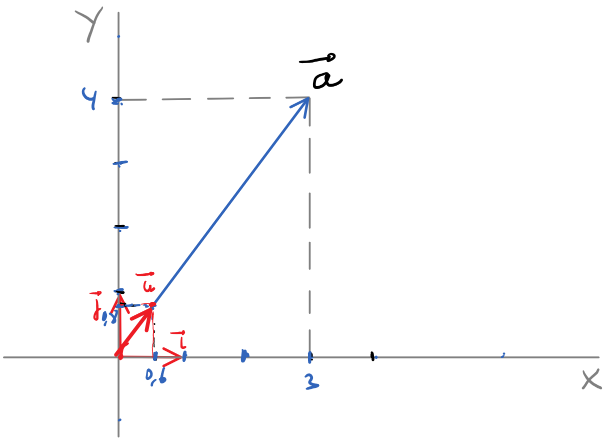


b) $\vec{a} - \vec{b} = -2\vec{i} + 7\vec{j}$



2. Si divides un vector por su módulo se obtiene un vector unitario. Calcula un vector unitario en la dirección del vector: $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Representa ambos vectores en un sistema de ejes cartesianos.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} = (3, 4) \\ |\vec{a}| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5\end{array}\right\} \quad \vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{3\vec{i}+4\vec{j}}{5} = \boxed{\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}} = \boxed{0,6\vec{i} + 0,8\vec{j}}$$



3. Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ y $\vec{b} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$:

a. Calcula el ángulo que forman entre ellos.

Sabemos que el producto escalar vale:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\alpha$$

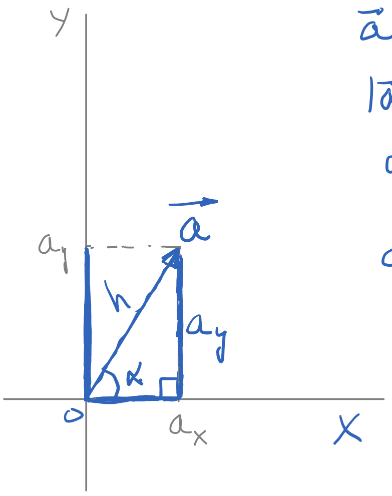
Despejamos : $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} \\ \vec{b} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}\end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l}\vec{a} \cdot \vec{b} = 12 + 2 - 6 = 8 \\ |\vec{a}| = \sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{9} = 3 \\ |\vec{b}| = \sqrt{6^2+(-2)^2+3^2} = \sqrt{49} = 7\end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{8}{3 \cdot 7} = \frac{8}{21} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{\alpha = \arccos\left(\frac{8}{21}\right) \simeq 60,61^\circ} = \boxed{= 60^\circ\, 36'\, 26,32''}$$

4. Calcula las componentes cartesianas del plano XY, del vector $\vec{a}$ que tiene por origen el origen de coordenadas, de módulo 5 unidades y que forma un ángulo de 52º 7' 48'' con el eje de las abscisas.



$$\vec{a} = (a_x, a_y) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

$$|\vec{a}| = 5$$

$$\alpha = 52^\circ 7' 48'' = 52{,}13^\circ$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \longrightarrow a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{a_x = 5 \cdot \cos(52{,}13^\circ) \cong 3{,}07}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \longrightarrow \boxed{a_y} = |\vec{a}| \cdot \operatorname{sen}\alpha =$$

$$= 5 \cdot \operatorname{sen}(52{,}13^\circ) \cong \boxed{3{,}95}$$

Por tanto:

$$\boxed{\vec{a} = (3{,}07\,;\,3{,}95)}$$

o:

$$\boxed{\vec{a} = 3{,}07\,\vec{i} + 3{,}95\,\vec{j}}$$

Ejercicio: Sea el vector de posición: $\vec{r}(t) = 3t\,\vec{i} - t^2\,\vec{j}$, en metros.

a) Calcula los vectores de posición en los instantes *t = 1s*, *t = 2s* y *t = 3s*.

b) Calcula el vector desplazamiento entre los instantes *t = 1s* y *t = 2s*.

c) Calcula el vector velocidad media entre los instantes *t = 1s* y *t = 2s*

d) Calcula el vector velocidad instantánea en función del tiempo. Y también en los instantes *t = 1s* y *t = 3s* (halla también sus módulos).

e) La ecuación de la trayectoria.

a) Como $\vec{r}(t) = 3t\,\vec{i} - t^2\,\vec{j}$, entonces:

$$\vec{r}(1) = 3\cdot 1\,\vec{i} - 1^2\,\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{r}(1) = 3\vec{i} - \vec{j}\quad (m)}$$

$$\vec{r}(2) = 3\cdot 2\,\vec{i} - 2^2\,\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{r}(2) = 6\vec{i} - 4\vec{j}\quad (m)}$$

$$\vec{r}(3) = 3\cdot 3\,\vec{i} - 3^2\,\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{r}(3) = 9\vec{i} - 9\vec{j}\quad (m)}$$

b) $\Delta\vec{r}_{1\to 2} = \vec{r}(2) - \vec{r}(1) = (6\,\vec{i} - 4\,\vec{j}) - (3\,\vec{i} - \vec{j}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\vec{r}_{1\to 2} = 3\,\vec{i} - 3\,\vec{j}\quad (m)}$$

c) $\vec{v}_m = \dfrac{\Delta\vec{r}_{1\to 2}}{\Delta t} = \dfrac{3\,\vec{i} - 3\,\vec{j}}{2 - 1} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_m = 3\,\vec{i} - 3\,\vec{j}\quad (m/s)}$

d) Como: $\Rightarrow$ $= \dfrac{d(3t)}{dt}\,\vec{i} - \dfrac{d(t^2)}{dt}\,\vec{j} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = 3\,\vec{i} - 2t\,\vec{j}\qquad (m/s)}$$

Sustituyendo el tiempo:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{v}(1) = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j}\quad (m/s) \\ \vec{v}(3) = 3\,\vec{i} - 6\,\vec{j}\quad (m/s) \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} |\vec{v}(1)| = v(1) = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}\ m/s \\ |\vec{v}(3)| = v(3) = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = \sqrt{45}\ m/s \end{array}}$$

e) Para hallar la ecuación de la trayectoria, y = f(x), eliminamos el parámetro tiempo de las ecuaciones paramétricas. Es decir:

$$x = 3t \Rightarrow t = \frac{x}{3} \Rightarrow y = -\left(\frac{x}{3}\right)^2 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{x^2}{9}}$$

$$y = -t^2$$

Ejercicio: La velocidad de un móvil en un instante inicial es $\vec{v}_0 = -2\vec{i} - 2\vec{j}$ m/s y, dos segundos después, es $\vec{v} = 4\vec{i} + 10\vec{j}$ m/s. Calcula el vector aceleración media entre esos dos instantes y su módulo.

Datos: $\vec{v}_0 = -2\vec{i} - 2\vec{j}$ m/s ; $\Delta t = 2$ s ; $\vec{v} = 4\vec{i} + 10\vec{j}$ m/s

La aceleración media $\vec{a}_m$ entre dos instantes la obtenemos dividiendo la variación de la velocidad $\Delta\vec{v}$ que experimenta el móvil entre esos dos instantes por el intervalo de tiempo Δt empleado en producir dicha variación de velocidad:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} = \frac{(4\vec{i} + 10\vec{j}) - (-2\vec{i} - 2\vec{j})}{2 - 0} = \frac{6\vec{i} + 12\vec{j}}{2} = \frac{6\vec{i}}{2} + \frac{12\vec{j}}{2} = (3\vec{i} + 6\vec{j})\ \frac{m}{s^2}$$

El módulo de este vector vale:

$$|\vec{a}_m| = a_m = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} \cong 6,7\ \frac{m}{s^2}$$

Ejercicio: Sea el vector de posición: $\vec{r}(t) = 3t\ \vec{i} - t^2\ \vec{j}$, en metros.

a) Calcula el vector aceleración media entre los instantes $t = 1s$ y $t = 2s$
b) Calcula el vector aceleración instantánea en función del tiempo. Y también en los instantes $t = 1s$ y $t = 2s$ (halla también sus módulos).

a) $$\vec{v}(t) = 3\ \vec{i} - 2t\ \vec{j}\quad (m/s)$$

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}_{1\rightarrow 2}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(2) - \vec{v}(1)}{2 - 1} = \frac{(3\ \vec{i} - 4\ \vec{j}) - (3\ \vec{i} - 2\ \vec{j})}{2 - 1} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_m = -2\ \vec{j}\ \ (m/s^2)}$$

b) Como: $$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d(3\vec{i} - 2t\vec{j})}{dt} = \frac{d(3)}{dt}\vec{i} - \frac{d(2t)}{dt}\vec{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}(t) = -2\ \vec{j}\ \ (m/s^2)}$$

La aceleración instantánea es constante, es decir, es un M.U.A., por tanto:

$$\boxed{\vec{a}(1) = \vec{a}(2) = -2\ \vec{j}\ \ (m/s^2)} \Rightarrow \text{Módulos: } \boxed{a(1) = a(2) = 2\ m/s^2}$$

5) El vector de posición de un móvil viene dado por la ecuación $\vec{r} = 2t\vec{i} + (1 - t^2)\vec{j} + 5\vec{k}$ (en unidades del S.I.) . Calculad el desplazamiento efectuado entre los 4 y 6s de comenzado el movimiento, el módulo de la velocidad y aceleración a los 5s y los valores de las componentes intrínsecas de la aceleración en ese mismo instante.

---

a) Como $\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} + (1 - t^2)\,\vec{j} + 5\,\vec{k}$, entonces:

$$\vec{r}(4) = 2\cdot 4\,\vec{i} + (1 - 4^2)\,\vec{j} + 5\,\vec{k} \Rightarrow \vec{r}(4) = 8\,\vec{i} - 15\,\vec{j} + 5\,\vec{k} \quad (m)$$

$$\vec{r}(6) = 2\cdot 6\,\vec{i} + (1 - 6^2)\,\vec{j} + 5\,\vec{k} \Rightarrow \vec{r}(6) = 12\,\vec{i} - 35\,\vec{j} + 5\,\vec{k} \quad (m)$$

$$\Delta\vec{r}_{4\to 6} = \vec{r}(6) - \vec{r}(4) = (12\,\vec{i} - 35\,\vec{j} + 5\,\vec{k}) - (8\,\vec{i} - 15\,\vec{j} + 5\,\vec{k}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\vec{r}_{4\to 6} = 4\,\vec{i} - 20\,\vec{j} \quad (m)}$$

b) Como: $$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \Rightarrow \vec{v}(t) = \frac{d(2t\,\vec{i} + (1-t^2)\,\vec{j} + 5\,\vec{k})}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = 2\,\vec{i} - 2t\,\vec{j} \quad (m/s) \Rightarrow |\vec{v}(t)| = \sqrt{2^2 + (-2t)^2} \quad (m/s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{v}(t)| = \sqrt{4 + 4t^2} \quad (m/s)\ (*) \Rightarrow |\vec{v}(5)| = \sqrt{4 + 4\cdot 5^2} \quad (m/s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{v}(5)| = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}\ \ m/s$$

c) Como: $$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{d(2\,\vec{i} - 2t\,\vec{j})}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = -2\,\vec{j} \quad (m/s^2) \Rightarrow |\vec{a}(t)| = |\vec{a}(5)| = 2\ m/s^2$$ M.U.A.

d) Como: $$a_t(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} \underset{(*)}{=} \frac{d(\sqrt{4 + 4t^2})}{dt} = \frac{8t}{2\cdot\sqrt{4 + 4t^2}} = \frac{4t}{\sqrt{4 + 4t^2}}$$

$$a_t(5) = \frac{4\cdot 5}{\sqrt{4 + 4\cdot 5^2}} = \frac{20}{\sqrt{104}} = \frac{5\sqrt{26}}{13}\ m/s^2$$

$$a_n(5) = \sqrt{a^2(5) - a_t^2(5)} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{5\sqrt{26}}{13}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{13}\ m/s^2$$

2) El vector posición de una partícula es el siguiente: $\vec{r} = (t-1)\ i + (t^2+2t-1)\ j$ (m) a) Escribir la ecuación de la trayectoria. b) ¿A qué distancia del origen se encuentra a los 3s?

a) Las ecuaciones paramétricas son:

$x = t - 1 \longrightarrow t = x+1$

$y = t^2 + 2t - 1 \longrightarrow y = (x+1)^2 + 2\cdot(x+1) - 1 \longrightarrow y = x^2 + 2x + 1 + 2x + 2 - 1 \longrightarrow$

$\longrightarrow \boxed{y = x^2 + 4x + 2}$ Movimiento Parabólico.

3) Un móvil tiene una velocidad de $\vec{v} = 3t^2\ \vec{i} + 4t^2\vec{j}$ m/s. Calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración.

Primero voy a calcular el vector aceleración instantánea, $\vec{a}(t)$ (no lo piden pero luego lo necesitaré).

$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 6t\ \vec{i} + 8t\ \vec{j}$ (m/s^2) $\longrightarrow$ Módulo: $|\vec{a}(t)| = a(t) = \sqrt{(6t)^2+(8t)^2} = \sqrt{100t^2} = 10t\ \frac{m}{s^2}$

Ahora calculo el módulo del vector velocidad: $|\vec{v}(t)| = \sqrt{(3t^2)^2+(4t^2)^2} = \sqrt{25t^4} = 5t^2\ \frac{m}{s}$

Aceleración tangencial: $\boxed{a_t(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} = 10t\ m/s^2}$

Aceleración normal: $\boxed{a_n(t) = \sqrt{a^2(t) - a_t^2(t)} = \sqrt{(10t)^2-(10t)^2} = 0\ \frac{m}{s^2}}$ Movimiento rectilíneo.

4) Un cuerpo se mueve de forma que su vector de posición es $\vec{r} = 4t^2\ i + 6t\ j - 3k$ (unidades del S.I.). Calcúlese para el instante t=2s: a) la velocidad; b) las componentes intrínsecas de la aceleración; c) el radio de curvatura; d) el tipo de movimiento.

a) ¿ $\vec{v}(2)$ y $|\vec{v}(2)|$?

Primero: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \boxed{8t\,\vec{i} + 6\,\vec{j}}$ (m/s)

$|\vec{v}(t)| = v(t) = \sqrt{(8t)^2 + 6^2} = \sqrt{64t^2+36}$ m/s

Ahora: $\boxed{\vec{v}(2) = 16\,\vec{i} + 6\,\vec{j}\ (m/s)}$

$\boxed{|\vec{v}(2)| = v(2) = \sqrt{64\cdot 2^2 + 36} = 2\sqrt{73}\ \frac{m}{s} \simeq 17{,}09\ m/s}$

b) ¿$a_t(2)$? ¿$a_n(2)$?

Primero la aceleración tangencial:

$a_t(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{64t^2+36}\right) = \frac{128t}{2\cdot\sqrt{64t^2+36}} = \frac{64t}{\sqrt{64t^2+36}}$

$\boxed{\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\cdot\sqrt{f}}}$

Ahora: $\boxed{a_t(2) = \frac{64\cdot 2}{\sqrt{64\cdot 2^2+36}} \simeq 7{,}49\ m/s^2}$

$a_n(2) = \sqrt{a^2(2) - a_t^2(2)}$ (*)

Antes calculamos el vector $\vec{a}(t)$:

$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(8t\,\vec{i} + 6\,\vec{j}) = 8\,\vec{i}\ \left(\frac{m}{s^2}\right)$ (constante). M.U.A

$|\vec{a}(t)| = 8\ m/s^2 \longrightarrow |\vec{a}(2)| = a(2) = 8\ m/s^2$

(*): $\boxed{a_n(2) = \sqrt{8^2 - (7{,}49)^2} \simeq 2{,}81\ m/s^2}$

c) ¿R(2)? Como $a_n(2) = \frac{|\vec{v}(2)|^2}{R(2)} \longrightarrow R(2) = \frac{|\vec{v}(2)|^2}{a_n(2)} \longrightarrow \boxed{R(2) = \frac{(2\cdot\sqrt{73})^2}{2{,}81} = 103{,}9\ m}$

d) Movimiento Uniformemente acelerado, ya que $\vec{a}$ es constante en el tiempo.

6) El vector de posición de una partícula móvil es $\vec{r} = t^3\,\vec{i} + 2t\,\vec{j} + \vec{k}$ (en unidades del S.I.). Calculad: a) La velocidad media en el intervalo 2 y 5s. b) La velocidad en cualquier instante. c) La velocidad en t=0, y en el instante t=1 s. d) Las aceleraciones tangencial, normal y total, en el instante t=1s, así como el radio de curvatura en ese momento. e) El ángulo que forman los vectores velocidad y aceleración en el instante t=1 s.

a) $\vec{v}_{m_{2\to5}} = \dfrac{\Delta \vec{r}_{2\to5}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{r}(5) - \vec{r}(2)}{5-2}$

$\vec{r}(2) = 2^3\,\vec{i} + 2\cdot2\,\vec{j} + \vec{k} = 8\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + \vec{k}$ (m)

$\vec{r}(5) = 5^3\,\vec{i} + 2\cdot5\,\vec{j} + \vec{k} = 125\,\vec{i} + 10\,\vec{j} + \vec{k}$ (m)

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{117\,\vec{i} + 6\,\vec{j}}{3} = 39\,\vec{i} + 2\,\vec{j} \ (m/s)}$$

b) ¿ $\vec{v}(t)$? ¿ $|\vec{v}(t)|$? $\boxed{\vec{r}(t) = t^3\,\vec{i} + 2t\,\vec{j} + \vec{k} \ (m)}$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 3t^2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} \ (m/s)}$$

$$\boxed{|\vec{v}(t)| = \sqrt{(3t^2)^2 + 2^2} = \sqrt{9t^4 + 4} \ (m/s)}$$

c) ¿ $\vec{v}(0)$? ¿ $|\vec{v}(0)|$?

$$\boxed{\vec{v}(0) = 2\,\vec{j} \ (m/s)} \quad \boxed{|\vec{v}(0)| = 2 \ m/s}$$

d) ¿ $\vec{v}(1)$? ¿ $a_t(1)$? ¿ $a_n(1)$?

$$\boxed{\vec{v}(1) = 3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} \ (m/s)} \longrightarrow \boxed{|\vec{v}(1)| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \ m/s}$$

$$a_t(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{9t^4+4}\right) = \frac{36t^3}{2\cdot\sqrt{9t^4+4}} = \frac{18t^3}{\sqrt{9t^4+4}}$$

$$\boxed{a_t(1) = \frac{18(1^3)}{\sqrt{9\cdot1^4+4}} = \frac{18}{\sqrt{13}} \simeq 4{,}99 \ m/s^2}$$

Primero calculo el vector $\vec{a}(t)$, y luego $a_n(1)$:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 6t\,\vec{i} \ (m/s^2) \longrightarrow \vec{a}(1) = 6\,\vec{i} \longrightarrow |\vec{a}(1)| = a(1) = 6 \ m/s^2$$

$$a_n(1) = \sqrt{a^2(1) - a_t^2(1)} \longrightarrow \boxed{a_n(1) = \sqrt{6^2 - (4{,}99)^2} = 3{,}33 \ m/s^2}$$

Ejercicio: Un bólido azul entra en el tramo recto de 14 km de un circuito autorizado de carreras, con una velocidad de 120 km/h manteniéndola constante todo el recorrido. ¿Qué tiempo tardará en llegar a la meta?. A los 4 min de su entrada, llega un bólido rojo al mismo tramo. ¿qué velocidad mínima debe llevar este último para llegar juntos a la meta?

O

x = 14 km

Bólido Azul (1): lleva MRU con v_1 = 120 km/h = 120/3,6 = 33,3 m/s

Ecuación de movimiento: $$x_1 = \underbrace{\cancel{x_{01}}}_{0} + v_1 \cdot t_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 33{,}3\ t_1$$

Cuando llegue a la meta x_1 = 14 km = 14000 m. Por tanto: $14000 = 33{,}3\ t_1 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad t_1 = \frac{14000}{33{,}3} \cong 420\ \text{s}$$

Bólido Rojo (2): lleva MRU con v_2 = ??. Entra 4 min = 240 s más tarde en la pista.

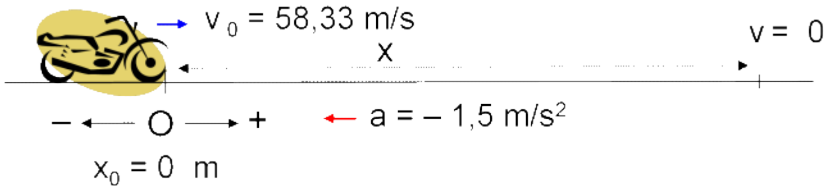
Ecuación de movimiento: $$x_2 = \underbrace{\cancel{x_{02}}}_{0} + v_2 \cdot t_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = v_2 \cdot (t_1 - 240)$$

Cuando llegue a la meta x_2 = 14 km = 14000 m. Por tanto: $14000 = v_2 \cdot (420 - 240) \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad v_2 = \frac{14000}{180} \cong 77{,}7\ \text{m/s}$$

Ejercicio: Una moto lleva una velocidad de 210 km/h. En un momento dado empieza a frenar con una aceleración constante de 1,5 m/s². a) ¿Qué tiempo tarda en pararse?; b) ¿Qué distancia recorre desde que empieza a frenar hasta que se para?

Datos: v_0 = 210 km/h = 58,33 m/s; a = – 1,5 m/s²



a) Elegimos como origen O del sistema de referencia el punto de la trayectoria donde se encuentra la moto en el instante que inicia la fase de frenado

En ese instante (t_0= 0 s), x_0 = 0 m , la moto tiene una velocidad de 58,33 m/s y una aceleración de – 1,5 m/s²

(Tiene sentido contrario al de la velocidad, ya que disminuye el valor de esta, hasta pararse).

Como la aceleración es constante (suponemos la trayectoria rectilínea), escribimos la ecuación de la velocidad para este movimiento:

$$v = v_0 + a \cdot (t - t_0) \quad ; \quad v = v_0 + a \cdot t \quad ; \text{ ya que } t_0 = 0\ \text{s}$$

y calculamos el tiempo que tarda en parar, despejándolo de la ecuación anterior:

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 58{,}33}{-1{,}5} = 38{,}9\ \text{s}$$

b) Para calcular la distancia que recorre la moto hasta pararse, hallamos la posición final x de la moto aplicando la ecuación de la posición en función del tiempo, con t_0 = 0 s :

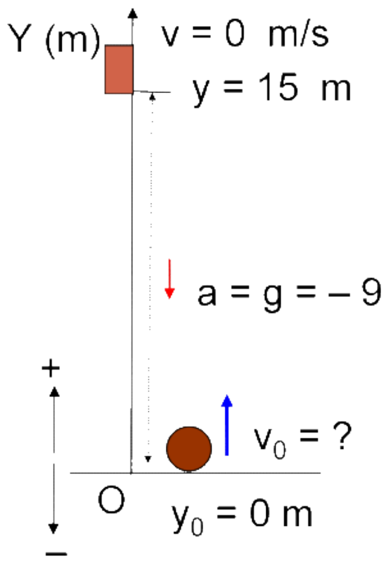
$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 0 + 58{,}33 \cdot 38{,}9 + \frac{1}{2}(-1{,}5) \cdot 38{,}9^2 = 2269 - 1124{,}9 = 1134{,}1\ \text{m}$$

Ejercicio: Un balón se lanza verticalmente hacia arriba. a) ¿Con qué velocidad mínima deberá lanzarse para que alcance una ventana situada a 15 m?; b) ¿Qué tiempo tarda en alcanzarla?

Elegiremos como punto origen O del movimiento el punto de partida del balón, la acera, y sentido positivo hacia arriba.

En este caso la aceleración del balón, $a = g = -9{,}8\ m/s^2$ es negativa ya que la velocidad con la que sube es positiva y va disminuyendo su valor debido a la aceleración negativa. Tiene un MRUV (de frenado).

La posición inicial es $y_0 = 0$ m y la final $y = 15$ m



a) El balón se pone en movimiento en el instante $t_0 = 0$ con una velocidad inicial v_0 y cuando llega a la posición final (la ventana) su velocidad es nula, $v = 0$ m/s

Calculamos la velocidad v_0 con la que el niño debe lanzar el balón desde la acera aplicando la ecuación de la velocidad en función de la posición:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot g \cdot (y - y_0)$$

Eliminamos los 0: $$0 = v_0^2 + 2 \cdot g \cdot y$$

Despejamos la velocidad inicial: $$v_0^2 = -2 \cdot g \cdot y \Rightarrow v_0 = \pm\sqrt{-2 \cdot g \cdot y}$$

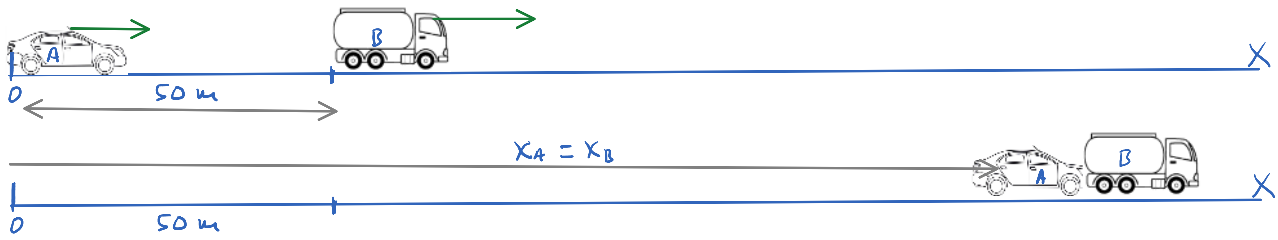
Y la calculamos : $$v_0 = +\sqrt{-2 \cdot (-9{,}8) \cdot 15} = 17{,}1\ \frac{m}{s}$$

b) Para calcular el tiempo que tarda el balón en llegar a la ventana, aplicamos la ecuación de la velocidad en función del tiempo:

$$v = v_0 + g \cdot t$$

Despejamos el tiempo y sustituimos: $$t = \frac{v - v_0}{g} = \frac{0 - 17{,}1}{-9{,}8} = 1{,}74\ s$$

4) Un coche y un camión se encuentran separados 50 m. El camión se está moviendo con una velocidad constante de 54 km/h. El coche, que estaba parado arranca con una aceleración de 1,6 m/s^2 que se mantiene constante. Determinar el momento y la posición en el que el coche alcanza al camión. ¿Qué velocidad tienen ambos en ese momento? Sol: t = 21,64 s; posición en la que se encuentran = 374,6 m medida desde la posición inicial del coche. Velocidades en el encuentro: coche = 34,6 m/s; camión = cte = 15 m/s = 54 km/h



- Coche : M.R.U.V: $x_{0A} = 0$; $V_{0A} = 0$; $a_A = 1,6\ m/s^2$

  Ec. movimiento : $x_A = x_{0A} + V_{0A} t + \frac{1}{2} a_A t^2$

  $x_A = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot t^2 \longrightarrow \boxed{x_A = 0,8\, t^2}$ (I)

- Camión : M.R.U: $x_{0B} = 50\ m$; $V_B = 54\ Km/h = 15\ m/s$

  Ec. movimiento : $x_B = x_{0B} + V_B \cdot t \longrightarrow \boxed{x_B = 50 + V_B \cdot t}$ (II)

a) El coche alcanza al camión cuando $x_A = x_B$

Igualamos: $0,8 t^2 = 50 + 15 t \longrightarrow 0,8 t^2 - 15 t - 50 = 0$

$$\boxed{t = \frac{+15 \pm \sqrt{15^2 + 4 \cdot 0,8 \cdot 50}}{1,6} = 21,64\ s}$$

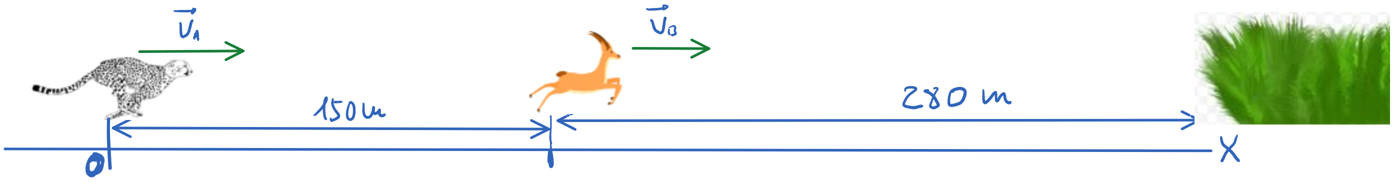
Lugar donde lo alcanza: $\boxed{x_A = x_B = 0,8 \cdot (21,64)^2 = 374,6\ m}$

b) Velocidad de ambos móviles en ese momento:

- Camión (MRU), su velocidad es constante, luego: $V_B = 15\ m/s = 54\ Km/h$
- Coche (MRUV):

  $V_A = \underset{0}{V_{0A}} + a_A \cdot t \longrightarrow V_A = 1,6 \cdot 21,64 = 34,6\ m/s = 124,56\ Km/h$

8) Un guepardo ve a una gacela a 150 m de distancia, y emprende una rápida carrera para cazarla. En ese mismo instante la gacela se da cuenta y huye hacia unos matorrales, situados a 280 m de la gacela, que pueden servirle de refugio. Suponiendo ambos movimientos como uniformes (velocidad del guepardo: 108 km/h, velocidad de la gacela: 72 km/h) ¿Quién sale ganando en esta lucha por la supervivencia? S: La gacela



Elijo origen de referencia donde se encuentra inicialmente el guepardo (A).

A → Guepardo ; M.R.U : $v_A = 108\ km/h : 3,6 = 30\ m/s$

B → Gacela ; M.R.U : $v_B = 72\ km/h : 3,6 = 20\ m/s$

Ecuaciones de cada móvil:

A → $x_A = \underset{0}{\underbrace{x_{0A}}} + v_A \cdot t$ → $\boxed{x_A = 30t}$ (I)

B → $x_B = x_{0B} + v_B \cdot t$ → $\boxed{x_B = 150 + 20t}$ (II)

Voy a calcular el t que tarda cada uno en llegar a los matorrales:

Matorrales (distancia desde el origen): $x = 430\ m$

A : (I): $430 = 30 \cdot t$ → $\boxed{t = \frac{430}{30} = 14,\hat{3}\ s}$

B : (II): $430 = 150 + 20t$ → $\boxed{t = \frac{430 - 150}{20} = 14\ s}$

Como la gacela tarda menos en llegar a los matorrales, ésta se salva

---

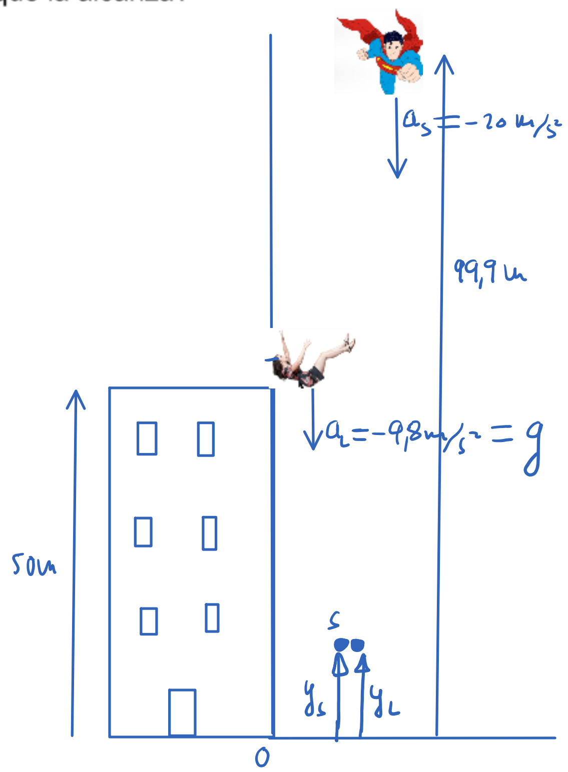
Otra forma: Calculamos en qué momento y posición alcanzaría el A a B:

Igualamos (I) y (II): $30t = 150 + 20t$ → $30t - 20t = 150$ → $10t = 150$ → $\boxed{t = 15\ s}$

Por ejemplo: $\boxed{x_A = 30 \cdot 15 = 450\ m}$

Como vemos el A alcanzaría a B a 450 m del origen, distancia mayor que la posición de los matorrales, por tanto la gacela se salva.

5) En el momento de caerse la Sta. Lane desde un edificio de 50 m de altura, Supermán, que se encuentra a 99,9 m de altura, empieza a volar descendiendo con una aceleración de 20 m/s^2, para intentar salvarla; ¿podrá Supermán salvarla (hallar la altura a la que la alcanza)? ¿Qué velocidad lleva Supermán y su novia en el instante que la alcanza?



Elijo como origen de referencia el suelo.

Supermán: MRUV: $y_{0s} = 99{,}9$ m ; $v_{0s} = 0$; $a_s = -20$ m/s²

$$y_s = y_{0s} + \underbrace{\cancel{v_{0s}}}_{0} t + \frac{1}{2} a_s t^2 \longrightarrow y_s = 99{,}9 + \frac{1}{2}(-20)t^2 \longrightarrow \boxed{y_s = 99{,}9 - 10t^2} \ (\text{I})$$

Sta. Lane: MRUV: $y_{0L} = 50$ m ; $v_{0L} = 0$; $a_L = g = -9{,}8$ m/s²

$$y_L = y_{0L} + \underbrace{\cancel{v_{0L}}}_{0} t + \frac{1}{2} a_L \cdot t^2 \to y_L = 50 + \frac{1}{2}(-9{,}8) \cdot t^2 \to \boxed{y_L = 50 - 4{,}9t^2} \ (\text{II})$$

Supermán alcanza a Lane, cuando $\boxed{y_s = y_L}$

Igualando (I) y (II):

$$99{,}9 - 10t^2 = 50 - 4{,}9t^2 \to 99{,}9 - 50 = 10t^2 - 4{,}9t^2 \to$$

$$\to 49{,}9 = 5{,}1 \cdot t^2 \to t = +\sqrt{\frac{49{,}9}{5{,}1}} \simeq 3{,}13 \text{ s}$$

En (I) $\to$ $\boxed{y_s = 99{,}9 - 10 \cdot (3{,}13)^2 \simeq 1{,}93 \text{ m}}$ La salva

Velocidades: Superman: $v_s = \underbrace{\cancel{v_{0s}}}_{0} + a_s \cdot t \to v_s = -20 \cdot t = -20 \cdot 3{,}13 \to$

$$\to \boxed{v_s = -62{,}6 \frac{m}{s} = -225{,}36 \frac{Km}{h}}$$

Lane: $v_L = \underbrace{\cancel{v_{0s}}}_{0} + a_L \cdot t \to$ $v_L = -9{,}8 \cdot t = -9{,}8 \cdot 3{,}13 = -30{,}67 \frac{m}{s} \to$

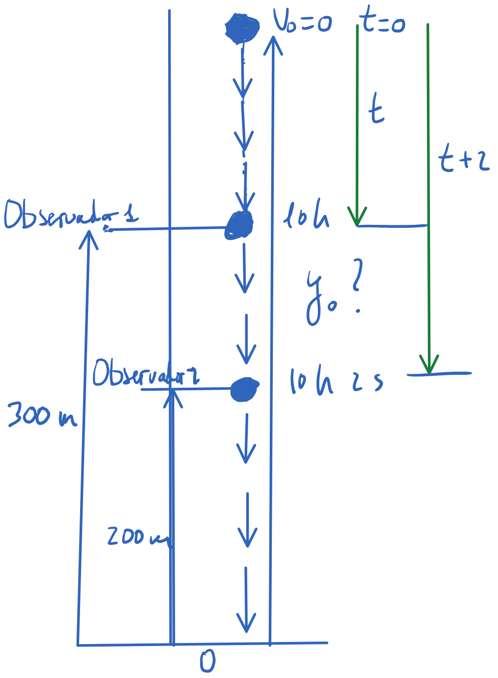
$$\to \boxed{v_L = -110 \text{ Km/h}}$$

6) Una piedra que cae libremente pasa a las 10 h frente a un observador situado a 300 metros sobre el suelo, y a las 10 h 2 s frente a otro observador situado a 200 metros sobre el suelo. Calcula:

a) La altura desde la que se cae.

b) En qué momento llegará al suelo.

c) La velocidad con que llegará al suelo.



Movimiento piedra : M.R.U.V / Caída libre $\}$ $a = g = -9{,}8\ m/s^2$

Elijo el origen de referencia en el suelo.

$$\boxed{y = y_0 + \cancel{v_0}\,t - 4{,}9t^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ob. 1} \longrightarrow 300 = y_0 - 4{,}9t^2 \\ \text{Ob. 2} \longrightarrow 200 = y_0 - 4{,}9\cdot(t+2)^2 \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 300 = y_0 - 4{,}9t^2 \longrightarrow 300 = \cancel{y_0} - \cancel{4{,}9t^2} \\ 200 = y_0 - 4{,}9\cdot(t^2+4t+4) \rightarrow -200 = -\cancel{y_0} + \cancel{4{,}9t^2} + 19{,}6t + 19{,}6 \end{array}\right\} +$$

a) Sumando : $100 = 19{,}6t + 19{,}6 \longrightarrow \boxed{t = \dfrac{100 - 19{,}6}{19{,}6} \simeq 4{,}1\,s}$

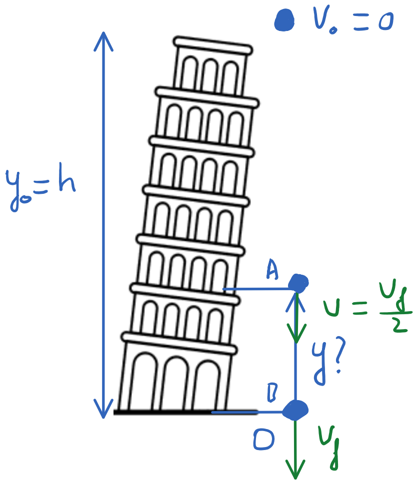
Sustituyo : $300 = y_0 - 4{,}9(4{,}1)^2 \longrightarrow \boxed{y_0 = 300 + 4{,}9\cdot(4{,}1)^2 \simeq 382{,}4\ m}$

b) $y = y_0 - 4{,}9t^2 \longrightarrow$ Llegará al suelo cuando $y = 0$:

$0 = 382{,}4 - 4{,}9\cdot t^2 \longrightarrow 4{,}9t^2 = 382{,}4 \longrightarrow \boxed{t = +\sqrt{\dfrac{382{,}4}{4{,}9}} = 8{,}83\,s}$

c) $V = \underset{0}{\cancel{V_0}} + gt \longrightarrow \boxed{V = -9{,}8\cdot 8{,}83 \simeq -86{,}6\ m/s}$

11) Desde lo alto de una torre de altura h se deja caer un objeto. ¿A qué distancia del suelo tendrá una velocidad igual a la mitad de la que tiene cuando llega al suelo? S: 3/4 h.



Caída libre : MRUV

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2g(y - y_0)}$$

$$A: \left(\frac{v_f}{2}\right)^2 = -19{,}6 \cdot (y - h) \longrightarrow \frac{v_f^2}{4} = -19{,}6y + 19{,}6h$$

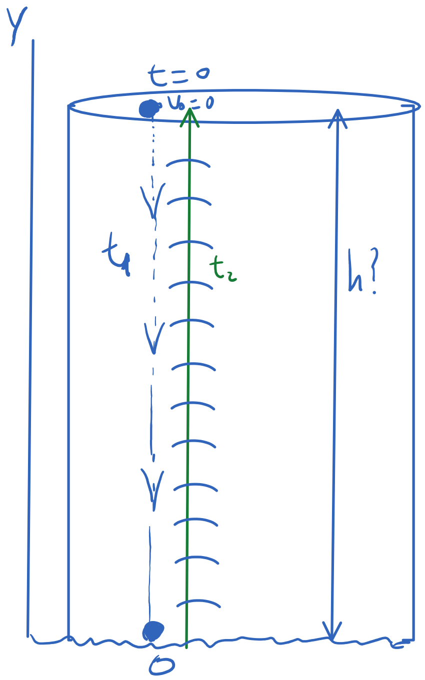
$$B: v_f^2 = -19{,}6(0 - h) \longrightarrow v_f^2 = 19{,}6h$$

$$\longrightarrow \frac{19{,}6h}{4} = -19{,}6y + 19{,}6h \longrightarrow 19{,}6h = -78{,}4y + 78{,}4h \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 78{,}4y = 78{,}4h - 19{,}6h \longrightarrow 78{,}4y = 58{,}8h \longrightarrow$$

$$\longrightarrow y = \frac{58{,}8}{78{,}8}h \longrightarrow \boxed{y = \frac{3}{4}h}$$

16) Se deja caer una piedra desde el brocal de un pozo y tarda 2,3 s en percibirse el sonido producido en el choque con el agua. Si la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s, ¿a qué profundidad está el agua?   S: 24 m.



Tiempo total: $t = t_1 + t_2 = 2{,}3\ s$ (*)

$t_1 \rightarrow$ Tiempo que tarda la piedra en llegar al fondo.
$t_2 \rightarrow$ " " y " el sonido " " arriba.

Elijo mi origen de referencia en el fondo.

Piedra. M.R.U.V.:

$$y_1 = y_{0_1} + \cancel{v_{01}}t_1 + \frac{1}{2}g t_1^2$$

$$\boxed{y_1 = h - 4{,}9t_1^2} \quad (I)$$

Sonido(2): M.R.U. $v_2 = 340\ m/s$

$$\hookrightarrow y_2 = \cancel{y_{0_2}} + v_2 \cdot t_2 \longrightarrow \boxed{y_2 = 340 \cdot t_2} \quad (II)$$

Ocurre: - Cuando la piedra llegue al fondo:

$$y_1 = 0 \xrightarrow{(I)} 0 = h - 4{,}9t_1^2 \rightarrow \boxed{h = 4{,}9t_1^2}$$

- Cuando el sonido llegue arriba: $y_2 = h \xrightarrow{(II)} \boxed{h = 340\,t_2}$

$\rightarrow$ Igualando: $4{,}9t_1^2 = 340t_2$

Como (*): $t_1 + t_2 = 2{,}3 \rightarrow t_2 = 2{,}3 - t_1$ $\Big\} \rightarrow 4{,}9\,t_1^2 = 340(2{,}3 - t_1) \rightarrow$

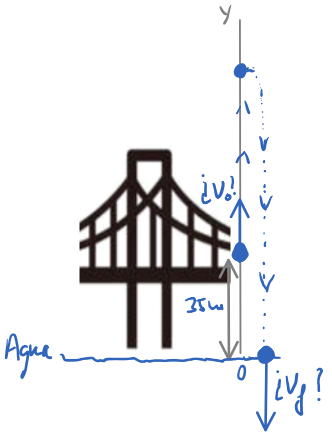
$$\rightarrow 4{,}9t_1^2 + 340t_1 - 782 = 0 \rightarrow \boxed{t_1 = \frac{-340 \pm \sqrt{340^2 + 4 \cdot 4{,}9 \cdot 782}}{9{,}8} = 2{,}23\ s}$$

Por tanto: $\boxed{h = 4{,}9 \cdot (2{,}23)^2 \cong 24{,}37\ m}$

13) Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba desde un puente situado a 35 m del agua. Si la piedra golpea el agua 4 s después de soltarla, calcula:

a) La velocidad con que se lanzó.

b) La velocidad con que golpeó el agua.



· Elijo el origen de referencia en el agua.

· La piedra posee un M.R.U.V.

Datos: $y_0 = 35\,m$; $t_f = 4\,s$. ; $a = g = -9{,}8\, m/s^2$

Ecuación de movimiento: $y = y_0 + V_0 t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$

a) Cuando llegue al agua: $0 = 35 + V_0 \cdot 4 - 4{,}9 \cdot 4^2 \rightarrow V_0 = \frac{4{,}9 \cdot 4^2 - 35}{4} \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{V_0 = 10{,}85\, m/s}$

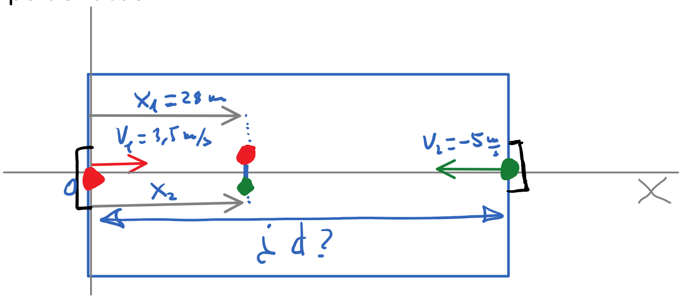
b) La velocidad de la piedra:

$V = V_0 + g \cdot t \rightarrow$ Cuando llega al agua: $\boxed{V_f = 10{,}85 - 9{,}8 \cdot 4 = -28{,}35\, m/s}$

Dos jóvenes se mueven en la misma dirección, dirigiéndose el uno al encuentro del otro. Inician el movimiento al mismo tiempo desde las porterías de un campo de fútbol con velocidades medias respectivas: v_1 = 3,5 m/s y v_2 = 5,0 m/s. Sabiendo que el encuentro tiene lugar a 28 m de la posición de partida del primero, determina:

a) El tiempo transcurrido hasta que se encuentran.

b) La longitud del campo de fútbol.



Elijo origen en la portería del joven 1.

Joven 1: M.R.U $\longrightarrow x_1 = \underset{0}{x_{01}} + v_1 \cdot t \longrightarrow \boxed{x_1 = 3,5 \cdot t}$ (I)

Joven 2: MRU $\longrightarrow x_2 = \underset{d}{x_{02}} + v_2 \cdot t \longrightarrow \boxed{x_2 = d - 5 \cdot t}$ (II)

Nos dicen que se encuentran en la posición respecto a mi origen (joven 1), a 28 m:

(I) $\longrightarrow x_1 = 28 = 3,5 \cdot t \longrightarrow \boxed{t = \frac{28}{3,5} = 8\ s}$ a

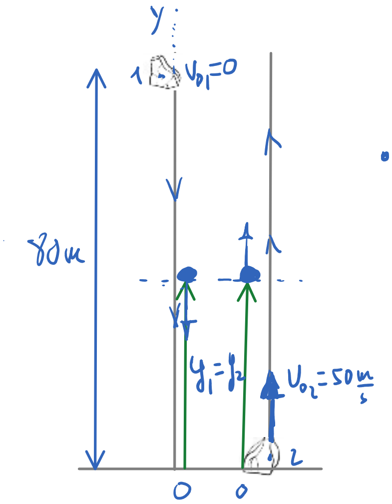
(II) $\longrightarrow x_2 = 28 = d - 5 \cdot 8 \longrightarrow 28 = d - 40 \longrightarrow \boxed{d = 68\ m}$ b

3) Desde una altura de 80 m se deja caer una piedra. Dos segundos más tarde se lanza otra desde el suelo en la misma vertical con una velocidad de 50 m/s. Calcular:

a) El tiempo que tardan en cruzarse.

b) A qué altura se produce dicho encuentro.

c) A qué altura se encuentra la 2ª piedra cuando la primera llega al suelo. En ese momento, ¿está subiendo todavía o ya viene bajando?



Elijo el sistema de referencia con origen en el suelo.

• Piedra 1: Datos: $v_{01}=0$; $a_1 = g = -9,8\ m/s^2$; $y_{01} = 80\ m$

MRUV: $y_1 = y_{01} + v_{01} t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2$

$y_1 = 80 + 0 + \frac{1}{2}(-9,8)\, t_1^2 \rightarrow \boxed{y_1 = 80 - 4,9 \cdot t_1^2}$ (I)

• Piedra 2: Datos: $y_{02} = 0$; $v_{02} = 50\ m/s$; $a_2 = g = -9,8\ m/s^2$

MRUV: $y_2 = \underbrace{y_{02}}_{0} + v_{02} t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2 \rightarrow \boxed{y_2 = 50 t_2 - 4,9 \cdot t_2^2}$ (II)

Sabemos que $\boxed{t_1 = t_2 + 2}$ (III)

a) Se cruzarán cuando $y_1 = y_2 \xrightarrow[(I)=(II)]{} 80 - 4,9 t_1^2 = 50 t_2 - 4,9 t_2^2$ →

$\rightarrow 80 - 4,9 \cdot (t_2+2)^2 = 50 t_2 - 4,9 \cdot t_2^2 \rightarrow 80 - 4,9 \cdot (t_2^2 + 4 t_2 + 4) = 50 t_2 - 4,9 \cdot t_2^2 \rightarrow$

$\rightarrow 80 - \cancel{4,9 t_2^2} - 19,6\, t_2 - 19,6 = 50 t_2 - \cancel{4,9 t_2^2} \rightarrow$

$\rightarrow 80 - 19,6 = 50 t_2 + 19,6\, t_2 \rightarrow 60,4 = 69,6\, t_2 \rightarrow \boxed{t_2 = \frac{60,4}{69,6} \cong 0,868\ s}$

Entonces (III): $\boxed{t_1 = t_2 + 2 = 2,87\ s}$

> Se cruzan 2,87 s después de dejar caer la 1ª piedra, o 0,87 s después de lanzar la 2ª piedra.

b) Como $\boxed{y_1 = y_2}$ (cuando se cruzan), uso una de ellas:

(I): $\boxed{y_1 = 80 - 4,9 \cdot (2,868)^2 \cong 39,7\ m}$

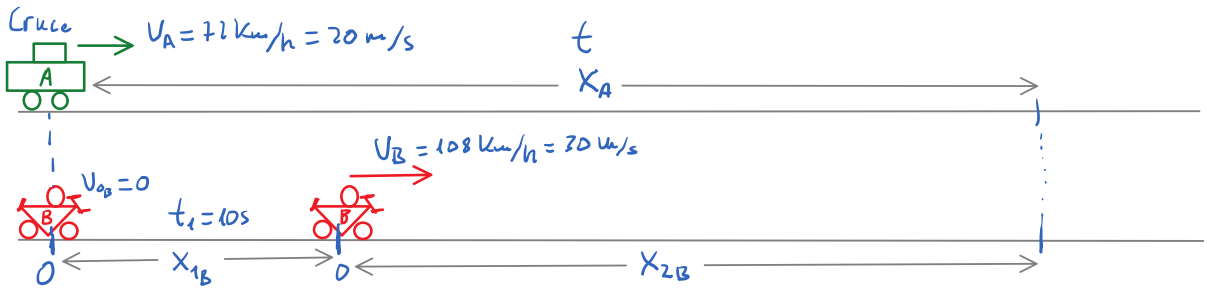
c) La 1ª piedra llega al suelo, $\boxed{y_1 = 0} \rightarrow$ (I) $\rightarrow 0 = 80 - 4,9 \cdot t_1^2 \rightarrow t_1 = +\sqrt{\frac{80}{4,9}} \cong 4,04\ s$

En ese momento ($t_1 = 4,04\ s$), $t_2 = t_1 - 2 = 2,04\ s \xrightarrow{(II)} \boxed{y_2 = 50 \cdot 2,04 - 4,9 \cdot (2,04)^2 \cong 81,6\ m}$

Calculamos su velocidad en ese momento: $\boxed{v_2 = v_{02} + a_2 \cdot t_2} \rightarrow$

$\boxed{v_2 = 50 - 9,8 \cdot 2,04 \cong 30\ m/s > 0} \rightarrow$ Como es + significa que va hacia arriba.

2) En un cruce existe una limitación de velocidad a 40 km/h. Un coche pasa por él a una velocidad de 72 km/h, que mantiene constante. En ese momento arranca una moto de la policía en la misma dirección y sentido, alcanzando una velocidad de 108 km/h en 10 s y después mantiene constante esta velocidad. ¿Cuánto tarda la moto en alcanzar al coche? ¿A qué distancia lo alcanza respecto al punto de donde salió?



Elijo origen en el cruce.

Coche: M.R.U.: $X_A = \underbrace{\cancel{X_{0A}}}_{0} + V_A \cdot t \rightarrow \boxed{X_A = 20\cdot t}$ (I)

Moto:

Tramo 1: M.R.U.V. Calculamos la aceleración: $a_B = \frac{V_B - V_{0B}}{t_1} = \frac{30-0}{10} = 3\ m/s^2$

Calculamos ahora la distancia, X_{1B}, recorrida en ese tramo 1:

$$X_{1B} = X_{01B} + V_{0B}\cdot t_1 + \frac{1}{2} a_B \cdot t_1^2 \rightarrow X_{1B} = 0 + 0 + \frac{1}{2} 3\cdot 10^2 \rightarrow \boxed{X_{1B} = 150\ m}$$

Tramo 2: M.R.U.: (tomo el origen de este tramo en el inicio de él):

$$X_{2B} = \underbrace{\cancel{X_{02B}}}_{0} + V_B\cdot t_2 \rightarrow \boxed{X_{2B} = 30\cdot t_2}\ \text{(II)}$$

• Cuando la moto alcanza al coche: $X_A = X_{1B} + X_{2B} \rightarrow 20t = 150 + 30t_2$

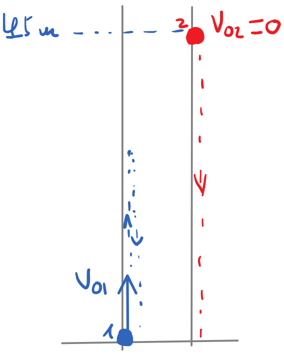
Además: $t = t_1 + t_2 \rightarrow t = 10 + t_2 \rightarrow t_2 = t - 10$ } →

$$\rightarrow 20t = 150 + 20\cdot(10 - t_2) \rightarrow 20t = 150 + 300 - 30t_2 \rightarrow t = \frac{150}{10} = 15\ s$$

Por tanto: $\boxed{X_A = 20\cdot 15 = 300\ m}$

Es decir, la moto alcanza al coche a 300 m del cruce, 15 s después de pasar por él.

14) Se lanza desde el suelo hacia arriba un objeto al mismo tiempo que se deja caer otro desde una altura de 45 m. ¿Con qué velocidad se debe lanzar el primero para que los dos lleguen al suelo al mismo tiempo? S: 15 m/s.



Elijo el suelo como origen de referencia para ambos:

Objeto 1 : MRUV : $a_1 = g = -9{,}8\ m/s^2$; $y_{01} = 0$; $V_{01} = ?$

$$y_1 = y_{01} + V_{01} t + \frac{1}{2} a_1 t^2 \rightarrow \boxed{y_1 = V_{01} t - 4{,}9 \cdot t^2} \ (I)$$

Objeto 2 : MRUV : $a_2 = g = -9{,}8\ m/s^2$; $y_{02} = 45\ m$; $V_{02} = 0$

$$y_2 = y_{02} + V_{02} t + \frac{1}{2} a_2 t^2 \rightarrow \boxed{y_2 = 45 - 4{,}9 t^2} \ (II)$$

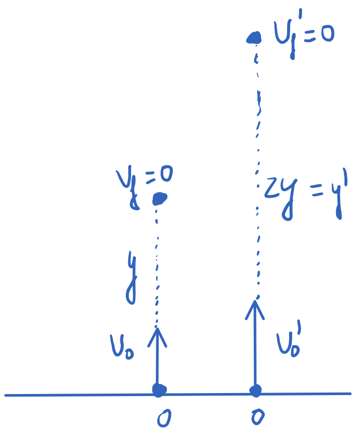
• Calculamos el tiempo que el objeto 2 tarda en llegar al suelo, que será el mismo que debe tardar el objeto 1 en subir y bajar:

$$(II) \rightarrow y_2 = 0 \rightarrow 0 = 45 - 4{,}9 \cdot t^2 \rightarrow \boxed{t = +\sqrt{\frac{45}{4{,}9}} \cong 3{,}03\ s}$$

• Ahora, usando (I):

$$y_1 = 0 \rightarrow 0 = V_{01} \cdot 3{,}03 - 4{,}9 \cdot (3{,}03)^2 \rightarrow \boxed{V_{01} = \frac{4{,}9 \cdot (3{,}03)^2}{3{,}03} \cong 14{,}85\ m/s}$$

17) Desde el suelo lanzamos hacia arriba un objeto a una determinada velocidad, llegando a cierta altura. Calcular por cuánto hemos de multiplicar su velocidad para que llegue al doble de altura.



Elijo origen en el suelo.

M.R.U.V:

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2g(y - y_0)} \quad (*)$$

1ª Vez: Velocidad inicial v_0 ; $a = g = -9{,}8\ m/s^2$; Altura $= y$.
Altura inicial $y_0 = 0$. ; $v_f = 0$

$$(*) \quad 0^2 = v_0^2 - 19{,}6 \cdot y \longrightarrow \boxed{v_0^2 = 19{,}6\, y} \ (I)$$

2ª Vez: Velocidad inicial v_0' ; $a = g = -9{,}8\ m/s^2$; Altura $= 2y$
Altura inicial $y_0 = 0$; $v_f' = 0$

$$(*) \quad 0^2 = v_0'^2 - 19{,}6 \cdot (2y - 0) \longrightarrow \boxed{v_0'^2 = 39{,}2\, y} \ (II)$$

Dividiendo ambas $\frac{II}{I}$:

$$\frac{v_0'^2}{v_0^2} = \frac{39{,}2\cancel{y}}{19{,}6\cancel{y}} = 2 \longrightarrow \left(\frac{v_0'}{v_0}\right)^2 = 2 \longrightarrow \frac{v_0'}{v_0} = \pm\sqrt{2} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{v_0' = +\sqrt{2}\, v_0}$$

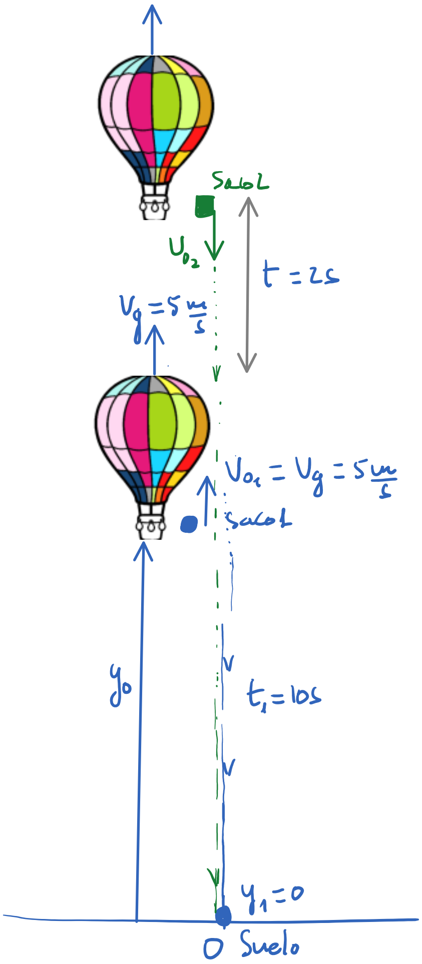
Conclusión hemos de lanzarlo con una velocidad que es $\sqrt{2}$ veces la velocidad anterior.

20) Desde un globo aerostático que asciende con una velocidad de 5 m/s se suelta uno de los sacos de lastre.

a) Si desde que se suelta hasta que llega al suelo transcurren 10 s, calcula la altura a la que se encontraba el globo en el momento de la caída.

b) Si 2 s después alguien lanza desde el globo otro saco hacia abajo, con qué velocidad debe hacerlo para que llegue al suelo en el mismo instante que el primer saco.

S: a) 440 m ; b) –17 m/s



Elijo el origen en el suelo

a) Voy a calcular la altura desde la cual se soltó el saco (y_0):

Saco 1: M.R.U.V : $V_{0_1} = 5 \, m/s$; $y_0 = ?$; $a_1 = g = -9,8 \, m/s^2$

$\longrightarrow y_1 = y_0 + V_{0_1} \cdot t_1 + \frac{1}{2} a_1 \cdot t_1^2 \longrightarrow$

Cuando llega al suelo: $0 = y_0 + 5 \cdot 10 - 4,9 \cdot 10^2 \longrightarrow$

$\longrightarrow \boxed{y_0 = 490 - 50 = 440 \, m}$

b) Voy a calcular donde está globo 2 s después:

Ec. globo : M.R.U $\longrightarrow y_g = y_0 + V_g \cdot t \longrightarrow$

$\longrightarrow y_g = 440 + 5 \cdot 2 = 450 \, m$

Saco 2 : M.R.U.V. : ¿ $V_{0_2} = ?$; $y_{02} = 450 \, m$; $a_2 = g = -9,8 \, \frac{m}{s^2}$

El segundo saco debe tardar $t_2 = 8 \, s$ en llegar al suelo.

$y_2 = y_{02} + V_{0_2} \cdot t_2 + \frac{1}{2} a_2 \cdot t_2^2$

Cuando llegue : $0 = 450 + V_{0_2} \cdot 8 - 4,9 \cdot 8^2 \longrightarrow$

$\longrightarrow \boxed{V_{0_2} = \frac{4,9 \cdot 64 - 450}{8} \cong -17 \, m/s}$

1) El vector de posición de un móvil en coordenadas cartesianas es: $\vec{r}(t) = (2t^3 - 5t^2 + 1)\vec{i} - (4 + 3t^2)\vec{j}$, donde el tiempo viene expresado en segundos. Calcular:

a) El vector velocidad instantánea, además de su valor y su módulo para el instante 1 s. El vector aceleración instantánea, además de su valor y su módulo para el instante 1 s.

b) El vector aceleración media en los 3 primeros segundos de iniciado el movimiento.

c) Los valores de las componentes intrínsecas de la aceleración en el instante 1 s.

d) ¿Cuál es el radio de curvatura en ese instante?

a) $\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (6t^2 - 10t)\vec{i} - 6t\vec{j}}$ (m/s)

$$|\vec{v}(t)| = v(t) = \sqrt{(6t^2-10t)^2 + (-6t)^2} = \sqrt{36t^4 - 120t^3 + 100t^2 + 36t^2} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow |\vec{v}(t)| = \sqrt{36t^4 - 120t^3 + 136t^2} \quad (*)$$

$$\boxed{\vec{v}(1) = (6\cdot 1^2 - 10\cdot 1)\vec{i} - 6\cdot 1\vec{j} = -4\vec{i} - 6\vec{j} \ (m/s)}$$

$$\boxed{|\vec{v}(1)| = \sqrt{36 - 120 + 136} = 2\sqrt{13} \ m/s}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = (12t - 10)\vec{i} - 6\vec{j}} \ (m/s^2) \longrightarrow \boxed{\vec{a}(1) = 2\vec{i} - 6\vec{j} \ (m/s^2)}$$

$$\boxed{|\vec{a}(1)| = a(1) = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{10} \ m/s^2}$$

b) $$\boxed{\vec{a}_{m\,(0\mapsto 3)} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(3) - \vec{v}(0)}{3-0} = \frac{24\vec{i} - 18\vec{j}}{3} = 8\vec{i} - 6\vec{j} \ m/s^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}(3) = 24\vec{i} - 18\vec{j} \\ \vec{v}(0) = \vec{0}\end{array}\right\}$$

c) ¿$a_t(1)$; $a_n(1)$?

$$a_t(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} \underset{(*)}{=} \frac{144t^3 - 360t^2 + 272t}{2\cdot\sqrt{36t^4 - 120t^3 + 136t^2}} = \frac{72t^3 - 180t^2 + 136t}{\sqrt{36t^4 - 120t^3 + 136t^2}}$$

$$\boxed{a_t(1) = \frac{72 - 180 + 136}{\sqrt{36 - 120 + 136}} = \frac{28}{\sqrt{52}} \simeq 3{,}883 \ m/s^2}$$

$$\boxed{a_n(1) = \sqrt{a^2(1) - a_t^2(1)} = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 - (3{,}883)^2} \simeq 4{,}99 \ m/s^2}$$

d) ¿$R(1)$? $\quad a_n(1) = \frac{v^2(1)}{R(1)} \longrightarrow \boxed{R(1) = \frac{v^2(1)}{a_n(1)} = \frac{(2\sqrt{13})^2}{4{,}99} = 10{,}42 \ m}$

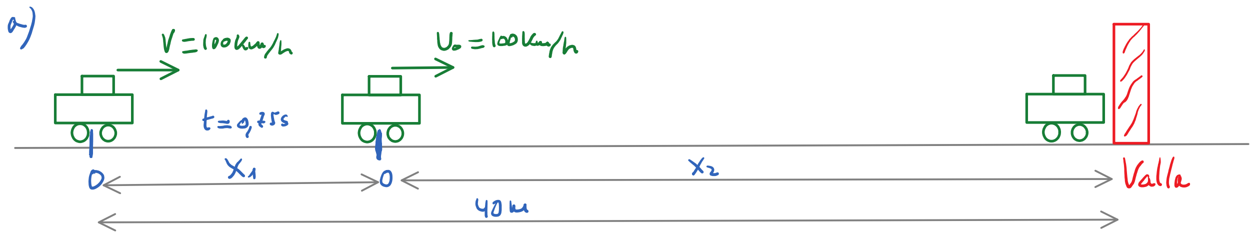
9) Un conductor que viaja de noche en un automóvil a 100 km/h, ve de repente las luces de señalización de una valla que se encuentra a 40 m en medio de la calzada. Si tarda 0,75 s en pisar el pedal de los frenos y la deceleración máxima del automóvil es de 10 m/s2:

a) ¿Chocará con la valla? Si es así, ¿a qué velocidad?

b) ¿Cuál será la velocidad máxima a la que puede viajar el automóvil sin que colisione con la valla?

S: a) 70 km/h; b) 78 km/h.

a)



Voy a estudiar por separado los dos movimientos del móvil.

1ª parte: M.R.U.. Dura $t = 0{,}75\ s$; $V = 100\ km/h = 27{,}\hat{7}\ m/s$; $X_0 = 0$

$\rightarrow X_1 = X_0 + V_1 \cdot t \rightarrow X_1 = 27{,}\hat{7} \cdot 0{,}75 = 20{,}8\hat{3}\ m$

2ª parte: M.R.U.V.: $V_0 = 27{,}\hat{7}\ m/s$; $a = -10\ m/s^2$; $X_0 = 0$

Distancia hasta la valla: $X_2 = 40 - X_1 = 19{,}1\hat{6}\ m$

$\rightarrow$ Velocidad con la que llega a la valla:

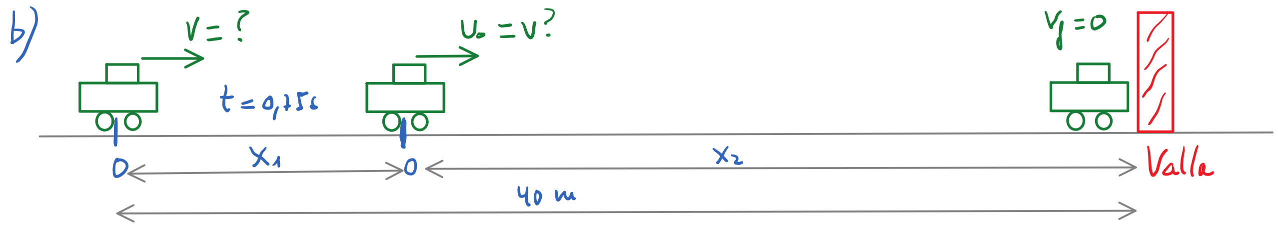
$$V^2 = V_0^2 + 2a(X_2 - X_0) \rightarrow V^2 = (27{,}\hat{7})^2 + 2\cdot(-10)\cdot(19{,}1\hat{6} - 0) \rightarrow$$

$$\rightarrow V^2 = (27{,}\hat{7})^2 - 383{,}\hat{3} \rightarrow V = \sqrt{388{,}77} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{V = 19{,}7\ \frac{m}{s} = 70{,}9\ km/h}$$

Es decir, chocará con la valla a esa velocidad.

b)



La condición de V máxima para que no colisione con la valla es que $V_f = 0$ (justo en la valla).

Voy a estudiar por separado los dos movimientos del móvil, para las nuevas condiciones:

1ª parte: M.R.U.. Dura $t = 0{,}75\ s$; $V_1 = V?$; $X_0 = 0$

$\rightarrow X_1 = X_0 + V_1 \cdot t \rightarrow \boxed{X_1 = V \cdot 0{,}75}$ (I)

2ª parte: M.R.U.V.: $V_0 = V?$; $a = -10\ m/s^2$; $X_0 = 0$

Velocidad con la que llega a la valla:

$$V_f^2 = V_0^2 + 2a(X_2 - X_0) \rightarrow 0^2 = V^2 + 2\cdot(-10)\cdot X_2 \rightarrow \boxed{X_2 = \frac{V^2}{20}}\ (II)$$

Se cumple que: $X_1 + X_2 = 40 \xrightarrow[(I)\ y\ (II)]{} V \cdot 0{,}75 + \frac{V^2}{20} = 40 \rightarrow V^2 + 15V - 800 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow V = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 + 4\cdot 800}}{2} \rightarrow \boxed{V = +21{,}76\ \frac{m}{s} \simeq 78{,}34\ \frac{km}{h}}$$

Velocidad máxima que puede llevar por O, para no chocar con la valla.