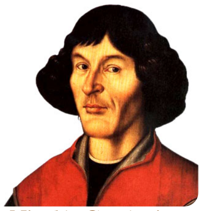
CAMPO GRAVITATORIO

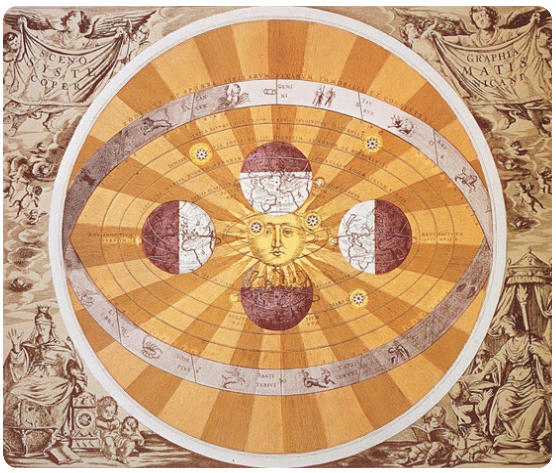
Astronomía y mecánica celeste



Nicolás Copérnico
Mikołaj Kopernik

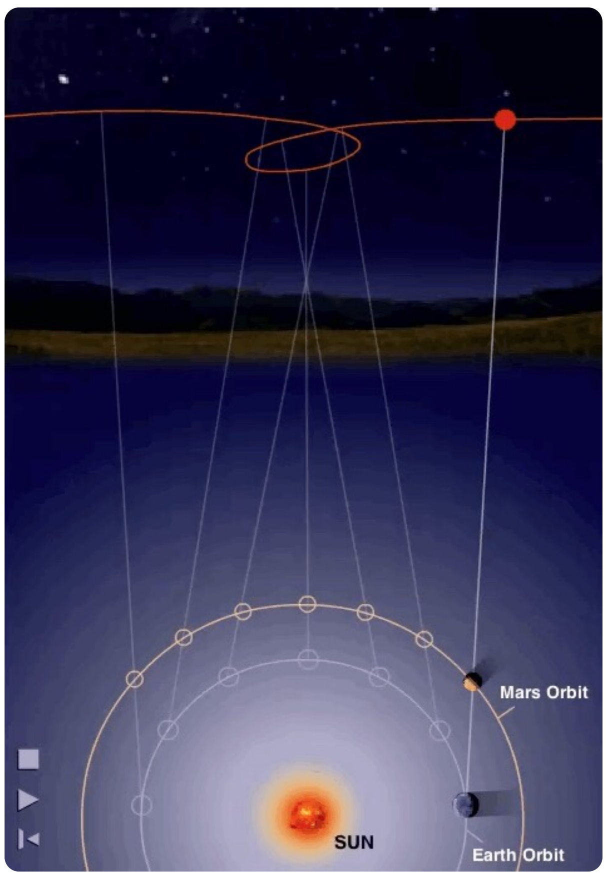
Thomas Digges

La Astronomía es la ciencia más antigua y el inicio de la Física (filosofía natural), que trata de comprender cómo funciona el Cosmos (orden en el Universo).
En la antigua Grecia, Aristóteles y después Ptolomeo, establecieron un sistema Geocéntrico del Universo con el Sol, las estrellas y los 5 planetas conocidos, orbitando en perfectos círculos en torno a la Tierra, estando las estrellas fijas, más lejos en una esfera de cristal.
1500 años después, el matemático y astrónomo polaco, Nicolás Copérnico, propuso el revolucionario modelo Heliocéntrico. Thomas Digges puso a las estrellas más allá de la esfera celeste en un espacio infinito. Inspiraron a Johannes Kepler y a Galileo Galilei.
Kepler estudió el movimiento retrógrado de Marte (movimiento aparente del planeta en el cielo). Utilizó los datos más precisos de la época, del astrónomo danés Tycho Brahe. Para su sorpresa descubrió que la órbita no encajaba en una circunferencia sino en una elipse, una curva ya conocida por los matemáticos griegos, de la familia de las curvas cónicas. Es un claro indicio de que las matemáticas son el lenguaje del Universo, como decía Galileo.



Modelo heliocéntrico de Copérnico

Movimiento retrógrado de Marte
en el cielo terrestre

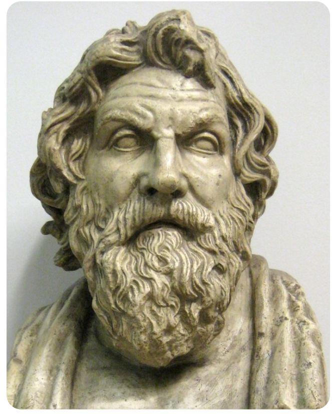


Explicación heliocéntrica

Johannes Kepler

Tycho Brahe

Astronomía en la antigua Grecia: Aristarco de Samos y Eratóstenes

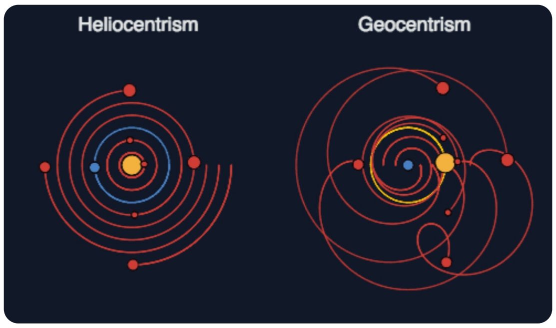


Aristarco
Ἀρίσταρχος

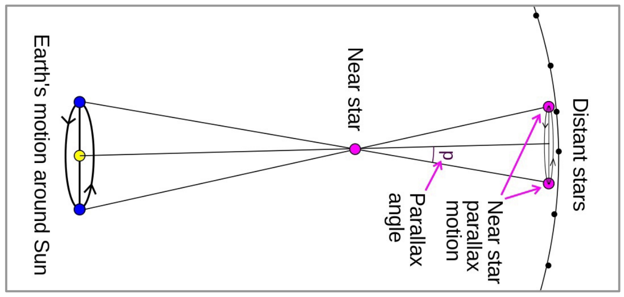
Aristarco, astrónomo y matemático griego, nacido en Samos, fue la primera persona que propuso el modelo heliocéntrico en el siglo III a.C.

Si su idea era correcta, ¿por qué no fue aceptada?

Como se puede apreciar en el siguiente dibujo, la hipótesis heliocéntrica simplificaba las órbitas planetarias, evitando los complicados "ecuantes" postulados por Ptolomeo posteriormente.

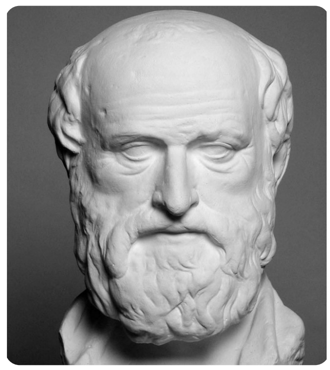


Si la hipótesis heliocéntrica es cierta, podemos observar las estrellas desde dos posiciones opuestas a lo largo del año, por ejemplo, en verano e invierno y, como consecuencia, deberíamos poder observar una posición relativa diferente de las estrellas. Este fenómeno se llama paralaje.



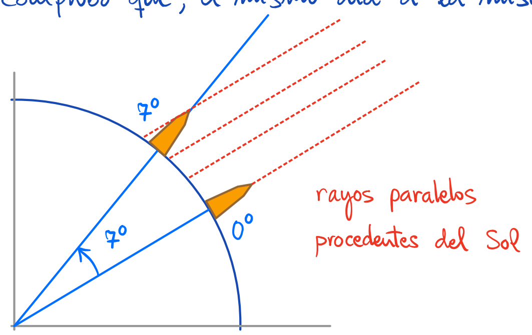
Utilizando trigonometría elemental (problema de la doble tangente) podríamos calcular la distancia a dichas estrellas. En la antigüedad, a simple vista, era imposible observar este fenómeno, y por eso se rechazó la hipótesis de Aristarco. Si tenía razón, las estrellas debían estar increíblemente lejos (la predicción, sabemos ahora, es correcta).

Eratóstenes, astrónomo y matemático griego nacido en Cirene, midió por primera vez la circunferencia de la Tierra con un margen de error muy pequeño.



Eratóstenes
Ερατοσθένης

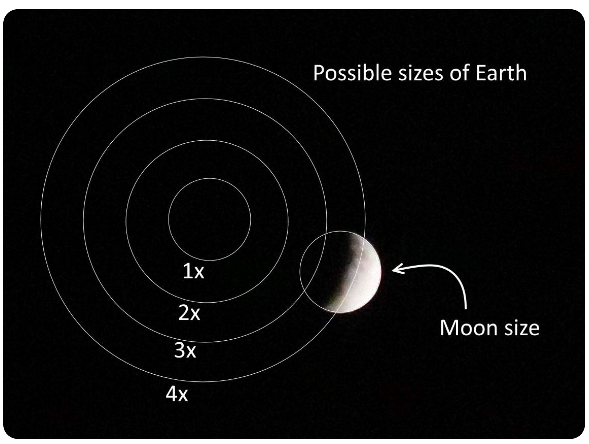
Midió la distancia entre las ciudades de Alejandría y Siena (800 km) y comprobó que, el mismo día a la misma hora, las sombras proyectadas por sendos obeliscos en ambas ciudades, diferían en unos 7°. Suponiendo que la Tierra es perfectamente esférica, calculó una circunferencia:



Se considera la prolongación de las sombras hasta el centro de la Tierra

$\frac{360}{7} \cdot 800 \approx 41142.857143$ km, unos 41.143 km, muy cerca del valor medio medido hoy en día 40.075 km.

Eratóstenes midió también el tamaño de la Luna. Para ello comparó el tamaño de la sombra de la Tierra sobre la Luna proyectada durante un eclipse de Luna. Estimó el radio de la Tierra como $\frac{41143}{2 \cdot \pi} \approx 6548.111824$ km



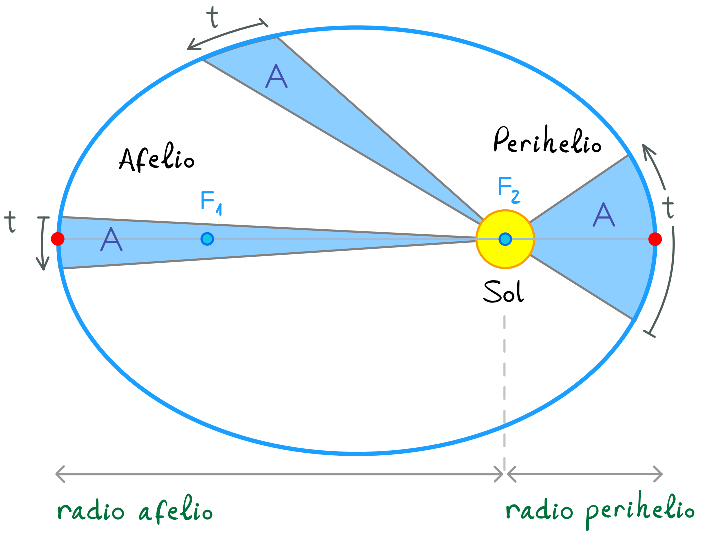
En la imagen de la izquierda se puede apreciar que la sombra de la Tierra es unas 3,8 veces mayor que el disco lunar, luego el radio de la Luna es $\frac{6548}{3{,}8} \approx 1723.157895$ km, muy cerca de los 1731 km medidos actualmente.

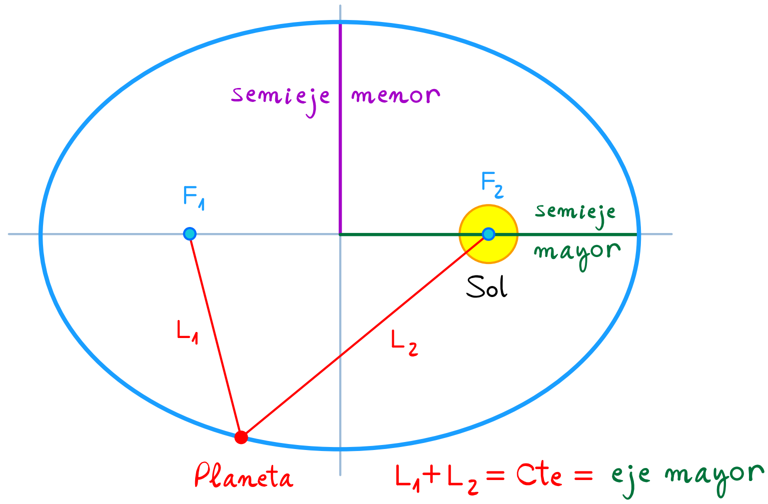
Las leyes de Kepler

Después de analizar exhaustivamente los datos, Kepler enunció 3 leyes.

1ª ley de Kepler

1ª ley de Kepler: Los planetas describen órbitas elípticas en torno al Sol, que está situado en uno de los focos de la elipse.

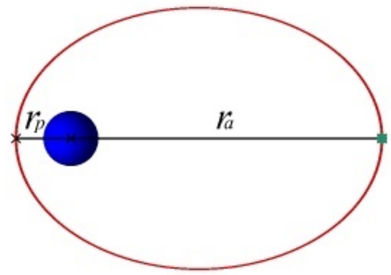




2ª ley de Kepler

Los planetas, en su órbita elíptica alrededor del Sol, barren áreas iguales en tiempos iguales. Se mueven más rápido cerca del Sol y más despacio lejos de él.

$$\boxed{r_{afelio} \cdot v_{afelio} = r_{perihelio} \cdot v_{perihelio}}$$



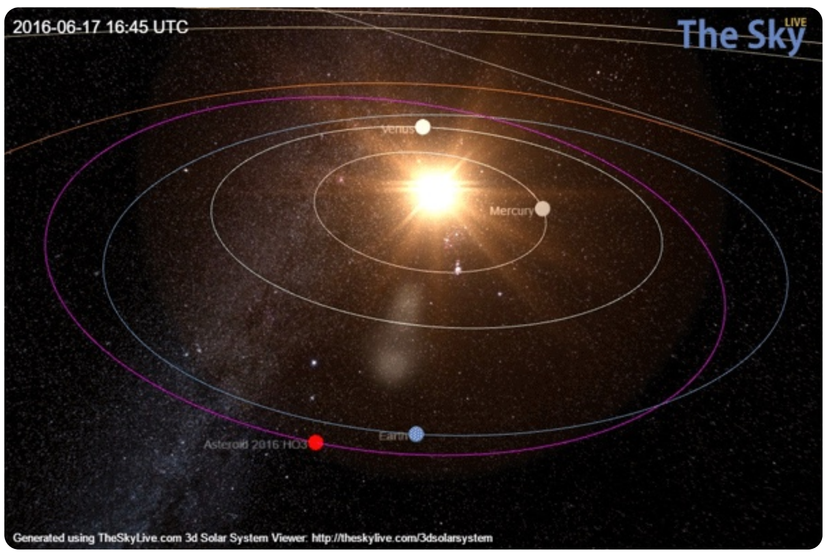
3ª ley de Kepler

La razón entre el cuadrado del período orbital y el cubo del radio medio de la órbita, es constante para todos los planetas.

$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = cte} \quad ; \quad \boxed{r_{medio} = \frac{r_{afelio} + r_{perihelio}}{2}}$$

Propiedad de la Elipse

También se cumple que r_{medio} = semieje mayor.



Los planetas más alejados del sol tienen un período orbital más largo. Creado con The SkyLive.

Magnitudes del movimiento circular

Es importante que recordemos algunas magnitudes que estudiamos en el tema de Física básica.

Período: $T \equiv$ Tiempo que tarda en completarse una órbita (ciclo).

Velocidad angular $\omega = \frac{\text{ángulo}}{\text{tiempo}} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$ $\left[\frac{\text{radianes}}{\text{segundo}}\right]$

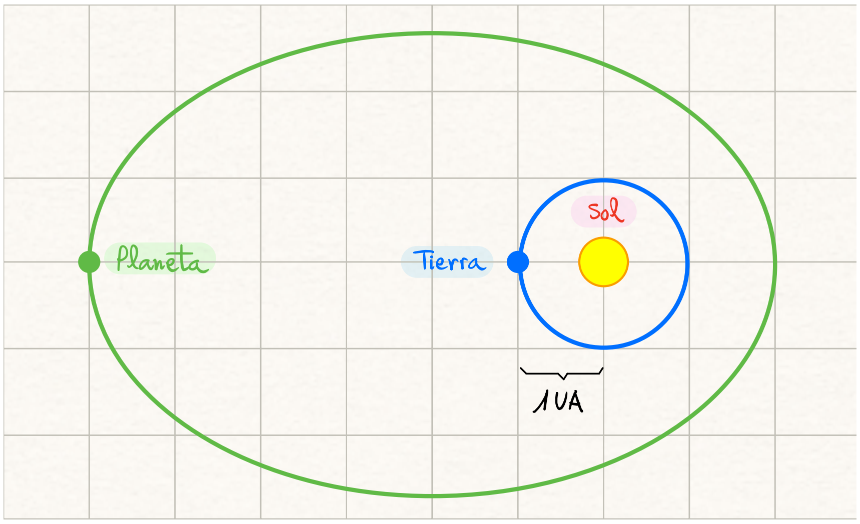
Frecuencia $\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$ $\left[\frac{\text{ciclos}}{\text{segundo}} = Hz = s^{-1}\right]$

Velocidad lineal $v = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}} = \underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{\omega} r = \omega \cdot r$, $\boxed{v = \omega \cdot r}$ Relación entre velocidad angular y lineal

$$\boxed{v = \frac{2\pi r}{T}}$$

$$\boxed{a_c = \frac{v^2}{r}}$$ Aceleración centrípeta

Cuestión: Calcula el período en años del planeta incógnita representado a la izquierda sabiendo que la Tierra tiene un período orbital de un año. La escala de la cuadrícula es 1UA (Unidad Astronómica = distancia Tierra-Sol)



Solución: El radio medio del planeta:

$$r_{medio} = \frac{r_{afelio} + r_{perihelio}}{2} = \frac{6+2}{2} = 4 \text{ UA}$$

$$\frac{T^2}{r^3} = cte \Rightarrow \frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{T_P^2}{r_P^3} \Rightarrow$$

$$\frac{(1 \text{ año})^2}{(1 \text{ UA})^3} = \frac{T_P^2}{(4 \text{ UA})^3} \Rightarrow$$

$$T_P = \sqrt{4^3} = 8 \text{ años}$$

¿Por qué las órbitas de los planetas son círculos o elipses?

Contrucción de una elipse y otras cónicas. La conferencia perdida de Feynman.

Richard Feynman

Demostrar por qué las órbitas de los planetas son elipses a partir de la ley de Newton de la inversa al cuadrado es una tarea matemática complicada utilizando las herramientas del análisis. Newton lo demostró geométricamente, pero el famoso premio Nobel de física Richard Feynman (EE.UU.) mostró un acercamiento geométrico del que sólo mostraré la parte más sencilla. Desde el centro de un círculo trazamos radios y dibujamos en rojo la recta perpendicular a dicho radio, pasando por el punto medio.

Para muchos radios observaremos que la envolvente de las perpendiculares (líneas rojas) es una circunferencia.

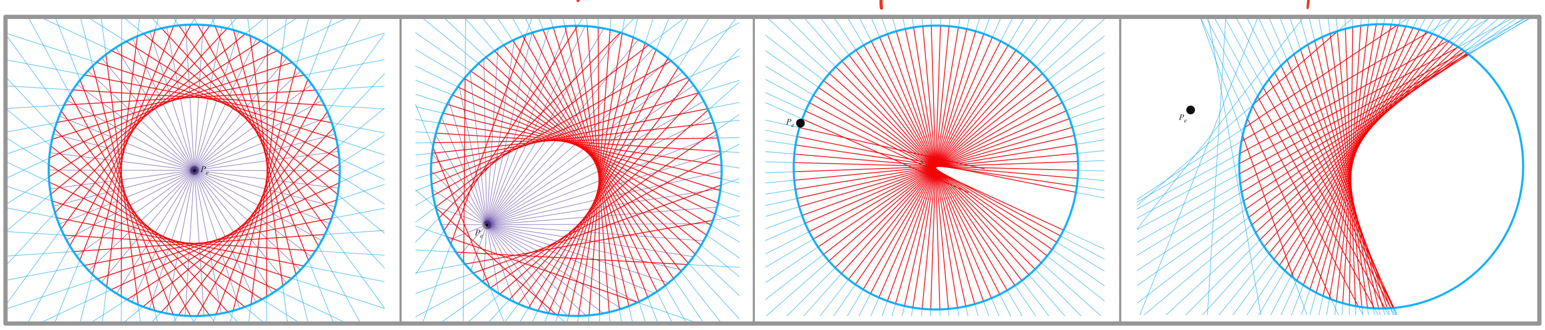
Los radios tienen la dirección de los radio-vectores desde el centro hasta un planeta que trazase esa órbita circular.

Las perpendiculares (líneas rojas) van en la dirección de la velocidad que es tangente a la trayectoria (es la derivada).

Si desplazamos el punto P_e (ahora es excéntrico), la envolvente se convierte en una elipse. La órbita es cerrada.

Si colocamos el punto P_e sobre la circunferencia, obtendremos una parábola y si lo situamos en el exterior de la circunferencia, obtendremos una hipérbola. Estas dos últimas curvas cónicas representan órbitas abiertas de planetas que alcanzan la velocidad de escape como veremos más adelante.

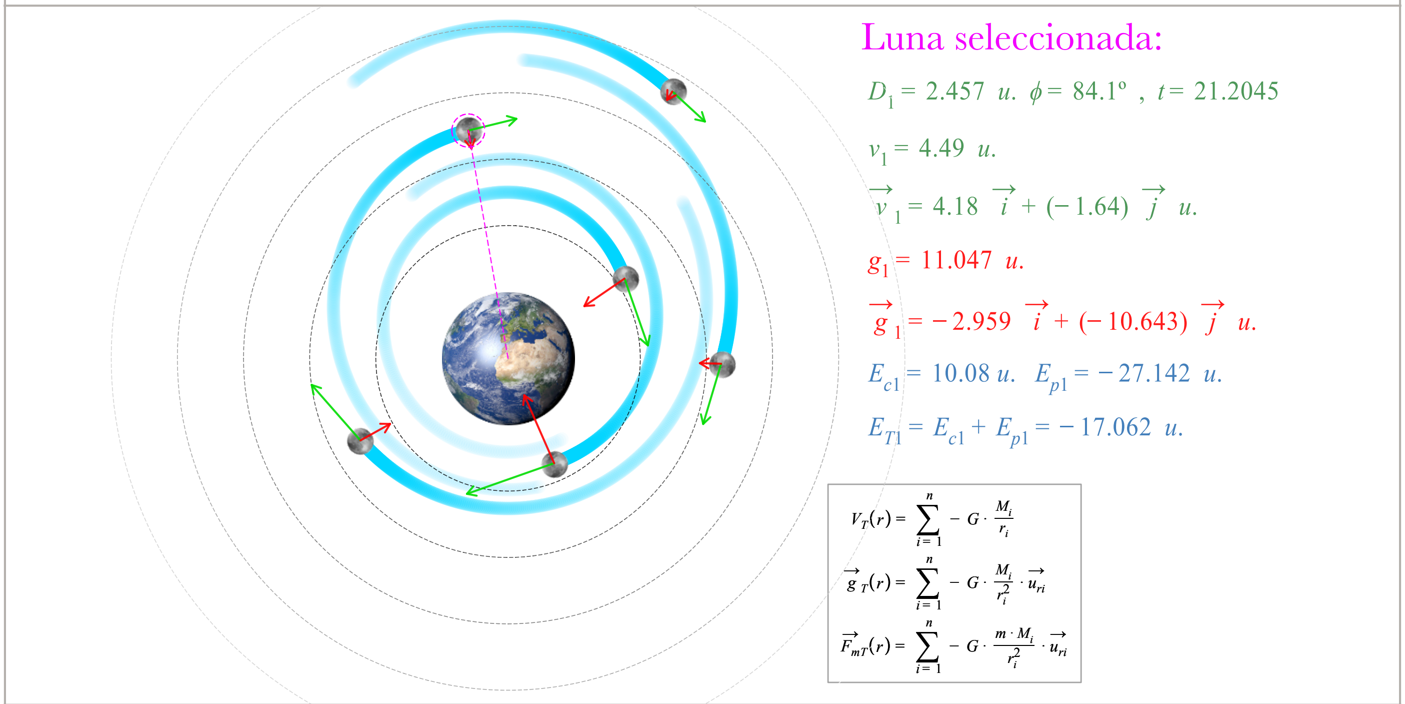
circunferencia | elipse | parábola | hipérbola



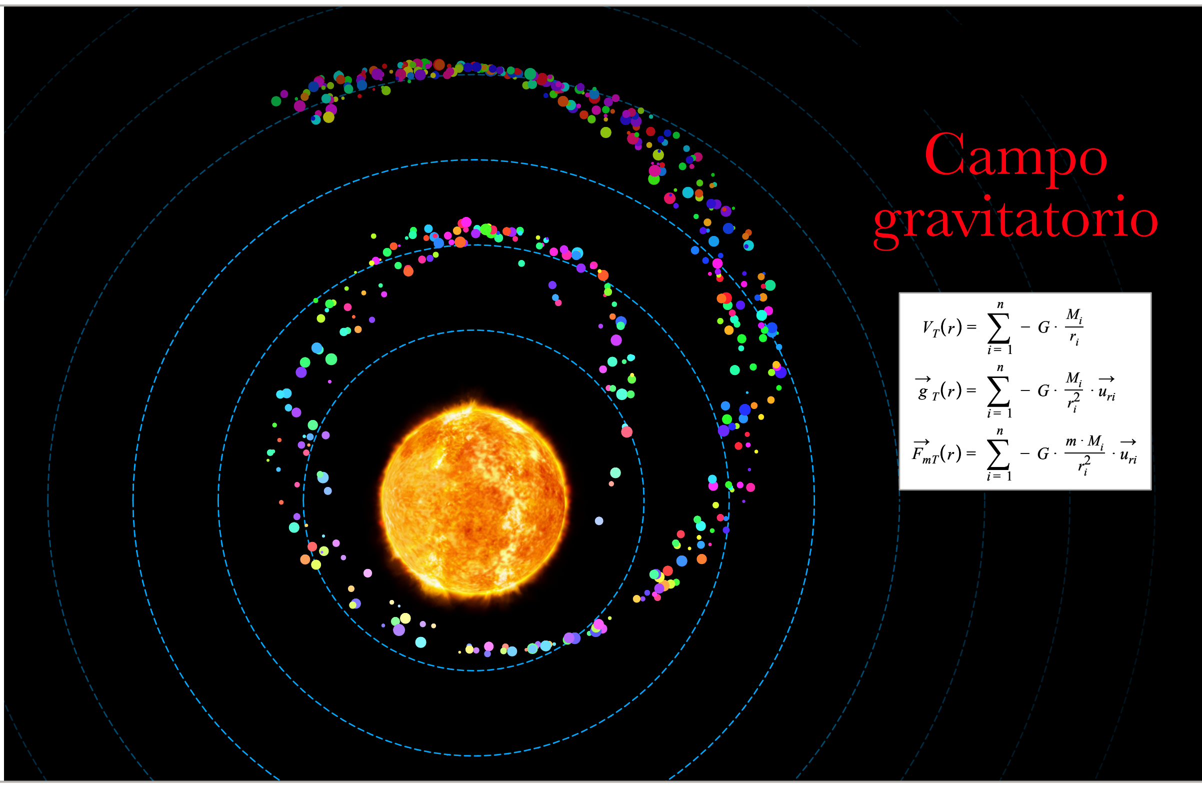
Se puede encontrar mi simulador aquí:

Simuladores de dinámica orbital. Gráficos generados con Desmos

Sistema con la Tierra orbitada por 6 satélites. Se muestra el vector velocidad en verde y el vector campo gravitatorio en rojo.
A la derecha se muestran los datos cinemáticos, dinámicos y mecánicos del satélite seleccionado.
Calculado en tiempo real por el método Runge-Kutta RK4.



Simulación dinámica de 1.000 partículas orbitando en un campo de fuerzas centrales.
Calculado en tiempo real por el método Runge-Kutta RK4.



✏️ Actividades de las leyes de Kepler

Ejercicio 1: Dos satélites artificiales, S_1 y S_2 , describen órbitas circulares alrededor de la Tierra con radios $r_1 = 7000\ km$ y $r_2 = 8650\ km$, contenidas en el mismo plano. ¿Cuál es la relación T_1/T_2 entre los períodos orbitales de los satélites S_1 y S_2? ¿Cuál es la relación v_1/v_2 entre sus velocidades orbitales? ¿Y la relación a_1/a_2 entre sus aceleraciones centrípetas?

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right) \quad \boxed{\frac{T^2}{r^3} = cte} \quad \frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \Rightarrow \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{r_1^3}{r_2^3}} \Rightarrow T_1 \simeq 0{,}73\, T_2 \quad (T_2 > T_1)$$

$$\left(\frac{v_1}{v_2}\right) \quad v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\left(\frac{\cancel{2\pi} r_1}{T_1}\right)}{\left(\frac{\cancel{2\pi} r_2}{T_2}\right)} = \frac{r_1}{T_1} \cdot \frac{T_2}{r_2}$$

Podemos sustituir la relación

o bien, sustituimos en la 3ª ley de Kepler.

$$\frac{\cancel{4\pi^2}\, \cancel{r_1^2}}{v_1^2\, r_1^{\cancel{3}\,1}} = \frac{\cancel{4\pi^2}\, \cancel{r_2^2}}{v_2^2\, r_2^{\cancel{3}\,1}} \Rightarrow \frac{1}{v_1^2 r_1} = \frac{1}{v_2^2 r_2} \Rightarrow \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} \Rightarrow v_1 \simeq 1{,}11\, v_2 \quad (v_1 > v_2)$$

$$\left(\frac{a_{c1}}{a_{c2}}\right) \quad \boxed{a_c = \frac{v^2}{r}}$$

Aceleración centrípeta

$$;\ \frac{a_{c1}}{a_{c2}} = \frac{\left(\frac{v_1^2}{r_1}\right)}{\left(\frac{v_2^2}{r_2}\right)} = \frac{v_1^2\, r_2}{v_2^2\, r_1} = \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2}\ , \quad \frac{a_{c1}}{a_{c2}} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} \Rightarrow \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{r_2}{r_1}$$

$$a_{c1} \simeq 1{,}53\, a_{c2} \quad (a_{c1} > a_{c2})$$

Ejercicio 2: Sabiendo que la distancia de Marte al Sol es de $1{,}523\ UA$, calcula el período de Marte en años terrestres. La unidad astronómica (UA) es la distancia media de la Tierra al Sol.

$$\frac{T^2}{r^3} = cte \Rightarrow \frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \Rightarrow \frac{(1\ \text{año})^2}{(1\ UA)^3} = \frac{T_{marte}^2}{(1{,}523\ UA)^3} \Rightarrow T_{marte} = \sqrt{1{,}523^3} \simeq 1{,}88\ \text{años}$$

Ejercicio 3: Dos planetas de masas iguales orbitan alrededor de una estrella de masa mucho mayor. El planeta 1 describe una órbita circular de radio $r_1 = 1{,}0 \cdot 10^8\ km$ con un período de rotación $T_1 = 2{,}0$ *años*. El planeta 2 describe una órbita elíptica cuya distancia más próxima a la estrella es igual a r_1 y la más alejada es $r_2 = 1{,}8 \cdot 10^8\ km$. ¿Cuál es el período de rotación del planeta 2?

$$\boxed{r_{medio} = \frac{r_{afelio} + r_{perihelio}}{2}}$$

Para el planeta 2 $\quad r_{medio} = \dfrac{1 \cdot 10^8 + 1{,}8 \cdot 10^8}{2} = 1{,}4 \cdot 10^8\ km$

$$\frac{T^2}{r^3} = cte \Rightarrow \frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \Rightarrow \frac{(2\ \text{año})^2}{(1 \cdot 10^8\ km)^3} = \frac{T_2^2}{(1{,}4 \cdot 10^8\ km)^3} \Rightarrow T_2 = \sqrt{\frac{2^2 \times (1{,}4 \times 10^8)^3}{(1 \times 10^8)^3}} \approx 3.313005\ \text{años}$$

$T_2 \simeq 3{,}3$ años, su período es mayor porque está más lejos de la estrella y orbita más lentamente.

Cómo dedujo Newton la ley de la Gravitación Universal

Newton recogió las 3 leyes empíricas de Kepler de los movimientos celestes.
También conocía las leyes de la cinemática de Galileo, del movimiento rectilíneo y del circular, que se refieren a objetos situados en la Tierra.
En la época de Newton se consideraba que la "esfera celeste" era independiente de los acontecimientos "terrestres" y, por lo tanto, obedecían leyes diferentes.
La genialidad de Newton radicó en plantearse una pregunta que conectaba ambas "esferas".

Isaac Newton

El problema de la mini-luna. Podemos aplicar la 3ª ley de Kepler a la Luna, en su órbita alrededor de la Tierra. Por observación astronómica conocemos su período de casi 28 días.
Desde la antigua Grecia se conocía la distancia a la Luna, calculada por Aristarco de Samos:

$r_L = 384.400$ Km (radio medio orbital): $\boxed{r_{medio} = \dfrac{r_{apogeo} + r_{perigeo}}{2}}$

$T = 27d\ 13h\ 18' \simeq 661,3h$ (período entre 2 perigeos consecutivos: período anomalístico).

Newton se preguntó cuál sería el período orbital de una mini-luna que orbitase sólo un poco por encima de las montañas para evitar chocar con ellas:

$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = cte} \qquad \frac{T_L^2}{r_L^3} = \frac{T_m^2}{r_m^3} \qquad \begin{array}{l} L \equiv \text{Luna} \\ m \equiv \text{Mini-Luna} \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} r_L = 384.400 \text{ Km} \\ r_m = R_T = 6370 \text{ Km} \end{array}\right\} \quad T_L = 661,3h$$

$$\frac{T_L^2}{r_L^3} = \frac{T_m^2}{r_m^3} \Rightarrow T_m = \sqrt{\frac{T_L^2}{r_L^3} \cdot r_m^3} = \sqrt{\frac{(661,3)^2}{384400^3} \times 6370^3} \approx 1.410693\,h \quad ; \quad T_m = 1,410693\,h$$

Calculamos la aceleración centrípeta asociada a este movimiento circular (fórmula demostrada más adelante):

$$a_c = \frac{V^2}{r}, \quad V = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow a_c = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2 \cdot r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4 \times \pi^2 \times 6370 \times 10^3}{(1{,}410693 \times 3600)^2} \approx 9.750551\, m/s^2 \simeq 9,8\, m/s^2$$

Asombrosamente obtuvo un valor de la aceleración exactamente igual a $g = 9,8\ m/s^2$ que previamente había calculado Galileo en sus experimentos de cinemática. ¡Demostró la conexión entre la aceleración de caída de los cuerpos terrestres y la aceleración centrípeta (de caída) de la mini-luna, un fenómeno celeste!
La fuerza que hace caer los cuerpos es la misma que hace girar a la mini-luna; es la fuerza de la Gravedad (caída de "graves" o cuerpos con masa).
Pero entonces, es la misma fuerza con que el sol atrae a los planetas, Júpiter a sus lunas, las estrellas en torno al centro de la galaxia y la dinámica de las galaxias en todo el Universo.

Una derivación sencilla de la expresión de la fuerza de la gravedad

A través de la 2ª ley de Newton, vamos a calcular la fuerza gravitatoria entre 2 cuerpos.

$$F = m\cdot a = m\cdot a_c = m\cdot\frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Como $\frac{T^2}{r^3} = cte = K$ $\quad T^2 = K\cdot r^3$

$$F = m\cdot\frac{4\pi^2 r}{K r^3} = \frac{4\pi^2}{K}\cdot\frac{m}{r^2}$$

(Ley inversamente proporcional al cuadrado de la distancia)

En el caso de la Tierra: $F = \cancel{m} g = \frac{4\pi^2}{K}\cdot\frac{\cancel{m}}{r^2}$ siendo: $r = R_T = 6370$ Km

$$K = \frac{4\pi^2}{g\cdot r^2} = \frac{4\times\pi^2}{9{,}8\times(6370\times10^3)^2} \approx 9.927840\times10^{-14} \text{ (S.I.)}$$

En esa constante debe de estar implícita la masa M del cuerpo que atrae a la masa m.

Si suponemos intuitivamente que la fuerza es proporcional a la masa de ambos cuerpos:

$\frac{4\pi^2}{K} = G\cdot M$, luego K no es verdaderamente constante. Varía de un planeta a otro.

$G \equiv$ Constante de la gravitación universal.

H. Cavendish

Reformulamos la fuerza como $\boxed{F = G\frac{M\cdot m}{r^2}}$ Ley de la Gravitación Universal [N]

Fue Henry Cavendish quien determinó la constante G como $6{,}67\cdot10^{-11}$ $N\cdot m^2/Kg^2$, precisamente cuando intentaba determinar la densidad de la Tierra con su famoso experimento de las balanzas de torsión.

La masa de la Tierra: $M = \frac{4\pi^2}{G\cdot K} = \frac{4\times\pi^2}{6{,}67\times10^{-11}\times9{,}92784\times10^{-14}} \approx 5.961820\times10^{24}$ Kg

La "constante" de Kepler puede por fin ser calculada a partir de parámetros conocidos: $\boxed{K = \frac{4\pi^2}{G\cdot M}}$

El cálculo exacto derivado de las leyes de Newton sería: $K = \frac{4\pi^2}{G\cdot(M+m)}$, pero si $M \gg m$ la primera ecuación es una buena aproximación.

Veamos qué tal funciona la 3ª ley de Kepler con datos reales de varios planetas:

$$\frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{T_m^2}{r_m^3} = \frac{T_v^2}{r_v^3}$$

T ≡ Tierra	$r_T \simeq 150\cdot10^6$ Km	$T_T \simeq 365$ días	$\frac{(365)^2}{(150)^3} \approx 0.039474$
m ≡ Marte	$r_m \simeq 228\cdot10^6$ Km	$T_m \simeq 687$ días	$\frac{(687)^2}{(228)^3} \approx 0.039821$
v ≡ Venus	$r_v \simeq 108\cdot10^6$ Km	$T_v \simeq 225$ días	$\frac{(225)^2}{(108)^3} \approx 0.040188$

Vemos que hay una buena coincidencia y que en cualquier caso, podemos calcular la masa del sol:

$$M_\odot = \frac{4\pi^2}{G\cdot K} = \frac{4\times\pi^2}{6{,}67\times10^{-11}\times\frac{(365\times24\times3600)^2}{(150\times10^6\times10^3)^3}} \approx 2.008610\times10^{30} \text{ kg}$$

; Nótese que recalculé K en el S.I. con los datos de la Tierra.

Ley de la gravitación universal. Fuerza gravitatoria.

$\boxed{F = G\frac{M \cdot m}{r^2}}$ Ley de Gravitación Universal [N]
(forma escalar) interacción entre masas

$\left[G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \right]$ (Calculada por Cavendish)

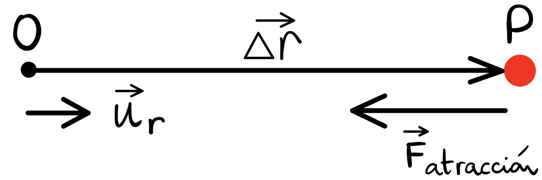
Vectorialmente, la gravedad es una fuerza central y atractiva.

$\boxed{\vec{F} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_r}$ Ley de Gravitación Universal [N]
(forma vectorial)

$\vec{F} \parallel \Delta\vec{r}$ antiparalelos

$\vec{F}$ y $\Delta\vec{r}$ forman 180°

De ahí el signo $\ominus$ de la fuerza gravitatoria que siempre es atractiva.



$\vec{u}_r$ es el vector unitario en la dirección de la línea que une ambas masas.

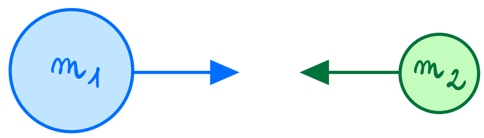
Campo gravitatorio

Un campo en general, asocia una magnitud física a cada punto del espacio en cada instante. Cuantitativamente se expresa como:

$$\boxed{\text{Campo} = \frac{\text{Fuerza}}{\text{Causa que la produce}}}$$

$$\left.\begin{array}{r} P = m \cdot g \\ F = G\frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot g \end{array}\right\} g = \frac{F}{m}$$

La aceleración o campo gravitatorio no depende de la masa del cuerpo que cae



$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ (3ª ley de acción – reacción)

$F_1 = F_2 = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ (módulo)

$\boxed{g = \frac{F}{m} = G\frac{M}{r^2}}$ Campo gravitatorio (forma escalar) $\left[\frac{N}{kg} = \frac{m}{s^2}\right]$

$\boxed{S_{esfera} = 4\pi r^2}$ $\boxed{V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3}$

$\boxed{F = m \cdot g}$ Fuerza

Tiene unidades de aceleración.

$$\frac{G\frac{Mm}{r^2}}{m} \Rightarrow \left[\frac{\frac{N \cdot \cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}} \, \frac{\cancel{kg^2}}{\cancel{m^2}}}{kg} = \frac{1N}{1kg} = \frac{1\cancel{kg} \cdot 1 m/s^2}{1\cancel{kg}} \right]$$

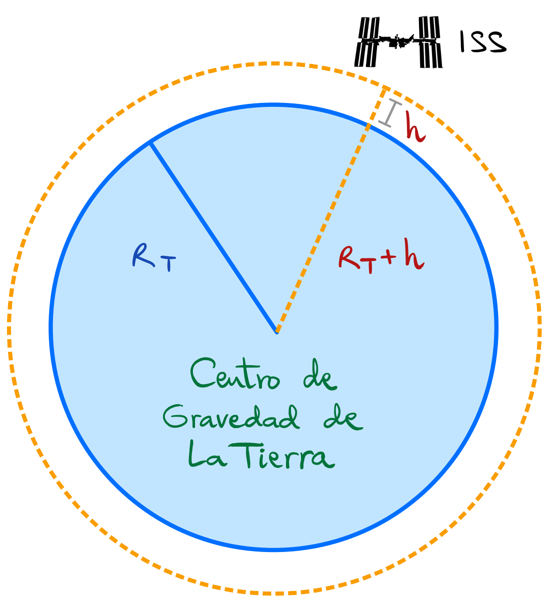
Análisis dimensional $\left[\frac{N}{kg} = \frac{m}{s^2}\right]$

Ejemplo: $g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = 9{,}8\, m/s^2$, Campo gravitatorio en la superficie de La Tierra.

$\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}_r}$ Campo gravitatorio (forma vectorial) $\left[\frac{N}{kg} = \frac{m}{s^2}\right]$

$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{g}}$ Fuerza

Ejercicio 4: Calcula el valor del campo gravitatorio en la *ISS* (International Space Station).
Datos: $g_0 = 9{,}81\ m/s^2$, $R_T = 6370\ km$, $h = 400\ km$

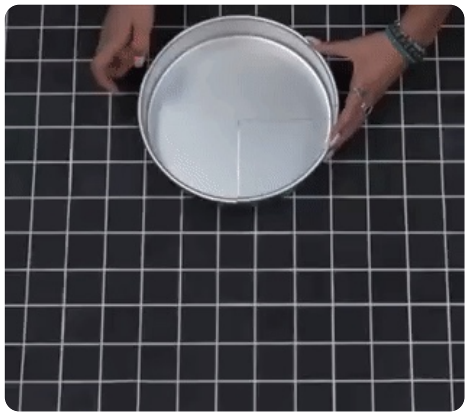


$r = R_T + h = (6370 + 400)\,km = 6770\,km = 6{,}77 \cdot 10^6\,m$

$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} \Rightarrow G M_T = g_0 \cdot R_T^2$

$g = G\frac{M_T}{r^2} = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{r^2} = \frac{9.81 \times (6{,}370 \times 10^6)^2}{(6.77 \times 10^6)^2} \approx 8.68501\, m/s^2 \simeq 8{,}7\, m/s^2$

Componentes intrínsecas de la aceleración



Cuando desaparece la aceleración centrípeta, la trayectoria continúa a lo largo de la recta tangente

$\vec{v} = |\vec{v}|\,\vec{\tau} = v \cdot \vec{\tau}$;

$\vec{\tau} \equiv$ vector tangente a la trayectoria

Es el vector unitario en la dirección de la velocidad.

La aceleración: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{dv}{dt}\vec{\tau} + v \cdot \dfrac{d\vec{\tau}}{dt}$

La aceleración tangencial: $\boxed{\vec{a}_\tau = \dfrac{dv}{dt}\vec{\tau}}$

La aceleración normal: (o centrípeta) $\boxed{\vec{a}_N = v \cdot \dfrac{d\vec{\tau}}{dt}}$

$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_\tau}$ Vector aceleración

$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_N|^2 + |\vec{a}_\tau|^2}}$ Módulo de la aceleración

$l = r \cdot \varphi \Rightarrow dl = r\, d\varphi$

$v = \dfrac{ds}{dt} = r\dfrac{d\varphi}{dt} = r \cdot \omega$

$\dfrac{d\vec{\tau}}{dt} = \dfrac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{N} = \omega \vec{N}$

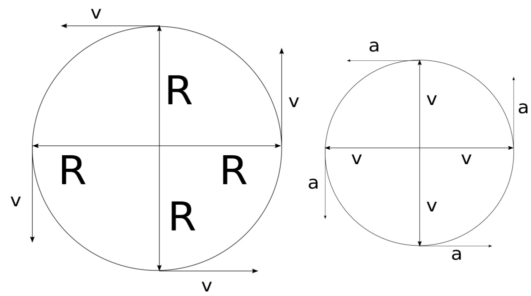
$\vec{N} \equiv$ vector normal

$\vec{a}_N = v \cdot \dfrac{d\vec{\tau}}{dt} = r \cdot \omega \cdot \dfrac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{N}$

$\omega = \dfrac{v}{r}$

$|\vec{a}_N| = a_N = r \cdot \omega^2 = r \cdot \dfrac{v^2}{r^2} = \dfrac{v^2}{r}$

$\boxed{a_N = \dfrac{v^2}{r}}$ Aceleración centrípeta



Demostración vectorial de la aceleración normal o centrípeta

En un movimiento circular uniforme, el vector de posición y el vector velocidad son perpendiculares en toda la trayectoria. MCU $\Rightarrow \vec{r} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{v} = 0$

Derivamos esta expresión con respecto del tiempo: $\dfrac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{r} \cdot \dfrac{d\vec{v}}{dt} = 0$

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ y $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow$

$\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{r} \cdot \vec{a} = 0$

$\vec{v}^2 + \vec{r} \cdot \vec{a} = 0$

$\vec{v}^2 = -\vec{r} \cdot \vec{a}$

Desarrollamos el producto escalar:

$|\vec{v}|^2 = -|\vec{r}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos\theta$

$v^2 = -r \cdot a \cdot \cos\theta$

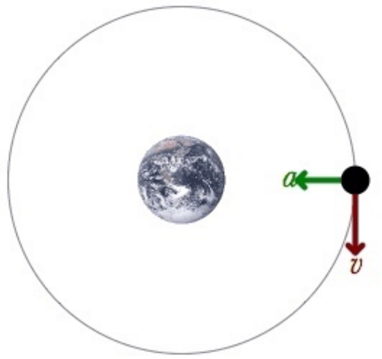
Como los módulos de los vectores y el cuadrado de la velocidad son positivos: $\cos\theta = -1$

$\vec{r}$ y $\vec{a}$ forman un ángulo de 180^0 ; $\vec{r}$ y $\vec{a}$ son antiparalelos a lo largo de toda la trayectoria.

Llamaremos $a = a_c$ (aceleración centrípeta).

$v^2 = r \cdot a_c \Rightarrow \boxed{a_c = \dfrac{v^2}{r}}$ Aceleración centrípeta $\left[\dfrac{m}{s^2}\right]$

Órbitas de satélites. Condición de órbita.



La condición de órbita es que la fuerza gravitatoria iguale a la fuerza centrípeta, si no un satélite caería o escaparía.

En órbita: $\boxed{F_g = F_c} \Rightarrow \boxed{g = a_c}$ Condición de órbita

$$G \cdot \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow G \cdot \frac{M}{r} = v^2$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}}$$ Velocidad orbital

Período Orbital

$$\left.\begin{array}{l} T = \dfrac{2\pi}{\omega} \\ v = \omega \cdot r \end{array}\right\}$$

$$T = \frac{2\pi}{\frac{v}{r}} = \frac{2\pi r}{v} \quad \text{(período)}$$

$$\boxed{v = \frac{2\pi r}{T}}$$

Ejercicio 5: Calcula la velocidad orbital de la estación espacial *ISS* con los datos del problema anterior.

$$G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2 \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{r}} = \sqrt{\frac{9.81 \times (6{,}370 \times 10^6)^2}{6.77 \times 10^6}} \approx 7667.95582\ m/s \simeq$$

$$\simeq 7667\ m/s = 7{,}7\ \frac{km}{s} \simeq 27601\ km/h \quad , \quad T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2 \times \pi \times 6.77 \times 10^6}{7667} \approx 5548.08459\ s \simeq 1{,}54\ h$$

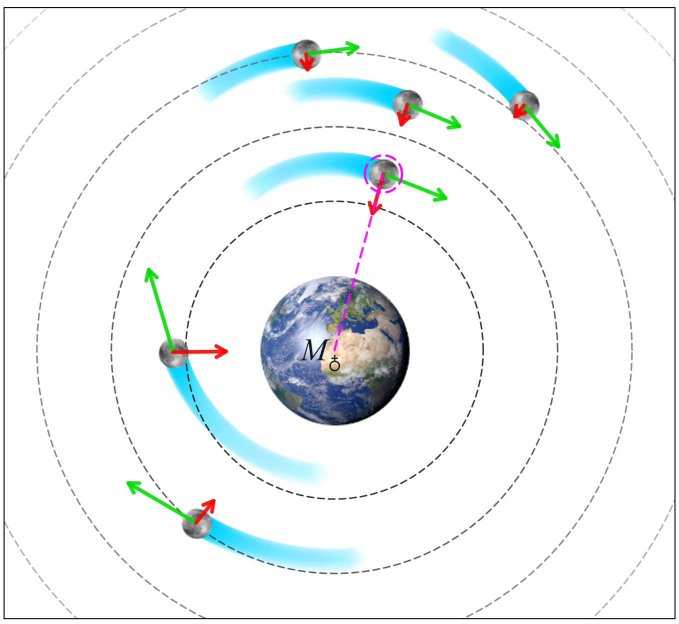
Demostración de la 3ª ley de Kepler

La condición de órbita es: $F_g = F_c$

$$\left.\begin{array}{l} G\dfrac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\dfrac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow G\dfrac{M}{r} = v^2 \\ \text{En el movimiento circular } v = \dfrac{2\pi r}{T} \end{array}\right\} G\frac{M}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2$$

$$G\frac{M}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = cte}$$ 3ª ley de Kepler

M es la masa central. En el caso del sistema solar, es la masa del Sol ($M_\odot$) En el caso de La Tierra y sus satélites sería la masa de La Tierra (M_T).



Mi simulador de dinámica orbital está disponible en FisQuiMat en la sección de gravitación

Actividades de la ley de la Gravitación

Ejercicio 6: Calcula la masa del Sol a partir del período y distancia orbital de La Tierra ($1\ UA$). Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$, $1\ UA = 1{,}5 \cdot 10^8\ km$, $T = 1$ año.

$$T = 1\ \text{año} = 31536000\ s \simeq 3{,}15 \cdot 10^7\ s \quad , \quad r = 1{,}5 \cdot 10^{11}\ m$$

$$M_\odot = \frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot T^2} = \frac{4 \times \pi^2 \times (1.5 \times 10^{11})^3}{6.67 \times 10^{-11} \times (3.15 \times 10^7)^2} \approx 2.01320 \times 10^{30}\ kg$$

(masa del Sol)

Práctica 1: [ABAU Junio 2019 op.A C.4] A partir de las medidas del radio orbital medio, r, y del período, T, de cuatro satélites que orbitan la Tierra se obtiene la tabla adjunta. Representa estos datos en una gráfica y determina a partir de ella la masa de la Tierra. Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$

Satélite	$T^2\ [s^2]$	$r^3\ [km^3]$
1	$3{,}18 \cdot 10^7$	$3{,}29 \cdot 10^{11}$
2	$3{,}89 \cdot 10^7$	$4{,}05 \cdot 10^{11}$
3	$4{,}75 \cdot 10^7$	$4{,}93 \cdot 10^{11}$
4	$1{,}44 \cdot 10^8$	$1{,}48 \cdot 10^{12}$

De acuerdo con la condición de órbita $F_g = F_c$

$$G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow G\frac{M}{r} = v^2$$

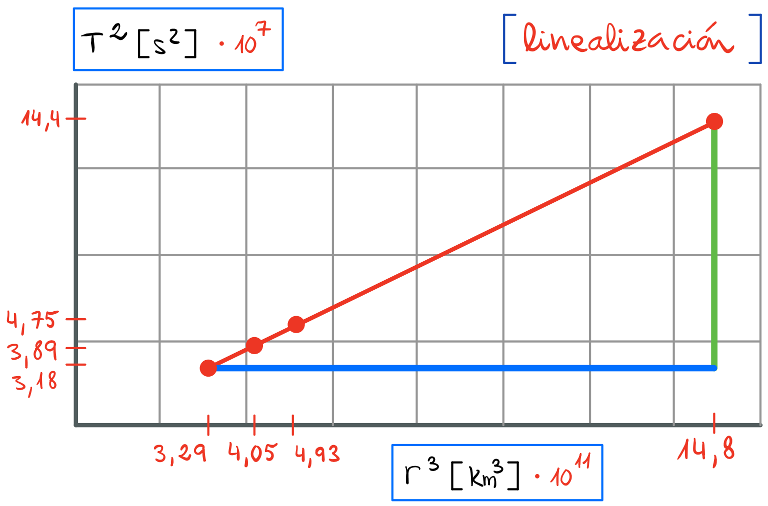
En el movimiento circular $v = \frac{2\pi r}{T}$

$$G\frac{M}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2$$

$$G\frac{M}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = K} \Rightarrow \boxed{T^2 = K \cdot r^3}$$ magnitudes directamente proporcionales

Si representamos gráficamente T^2 frente a r^3, obtendríamos una línea recta cuya pendiente es K.

A este proceso se le llama linealización. Transformamos las magnitudes matemáticamente de modo que la relación entre ellas sea lineal, es decir, proporcional y la gráfica sea una recta.



relación lineal $\Rightarrow$ proporcional $\Rightarrow$ gráfica recta

Reescribimos los datos del satélite 4 para que todos los datos queden con la misma potencia.

$$r^3 = 1{,}48 \cdot 10^{12} = 14{,}8 \cdot 10^{11}\ km^3$$

$$T^2 = 1{,}44 \cdot 10^8 = 14{,}4 \cdot 10^7\ s^2$$

Cómo calcular la masa de la Tierra a partir de la gráfica

Para calcular la pendiente de la recta en una gráfica lineal tomamos dos puntos convenientemente separados, por ejemplo, el primero y el último. La pendiente estimada a partir de la gráfica:

$$K = \frac{\text{Altura}}{\text{Anchura}} = \frac{14{,}4 - 3{,}18}{14{,}8 - 3{,}29} \cdot \frac{10^7}{10^{11}} \simeq 0{,}975 \cdot \frac{10^7}{10^{11}} \left[\frac{s^2}{km^3}\right] = 9{,}75 \cdot 10^{-5}\ \frac{s^2}{km^3} \cdot \frac{1\ km^3}{(10^3)^3 m^3} = 9{,}75 \cdot 10^{-14}\ \frac{s^2}{m^3}$$

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = K$$ (la pendiente de la gráfica de T^2 frente a r^3) $\Rightarrow$

$$M = \frac{4\pi^2}{GK} = \frac{4 \cdot \pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 9{,}75 \cdot 10^{-14}} \approx 6.070570 \times 10^{24}\ kg$$ que efectivamente, es la masa de la Tierra.

Práctica 2: A partir de las medidas del radio medio orbital, r, y del período, T, de la Tierra, Marte y Venus que orbitan alrededor del Sol, se obtiene la tabla adjunta. Representa estos datos en una gráfica de T^2 [días^2] frente a r^3 $[km^3]$.
Determina a partir de los datos la masa del Sol y la incertidumbre (calcula la media de los 3 valores que obtienes para los 3 planetas). Justifica la fórmula que utilices.
Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$

Planeta	T [días]	r $[km]$
Tierra	365	$1{,}5 \cdot 10^8$
Marte	687	$2{,}28 \cdot 10^8$
Venus	225	$1{,}08 \cdot 10^8$

De acuerdo con la condición de órbita $F_g = F_c$ $\Rightarrow$ $G\dfrac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\dfrac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow G\dfrac{M}{r} = v^2$

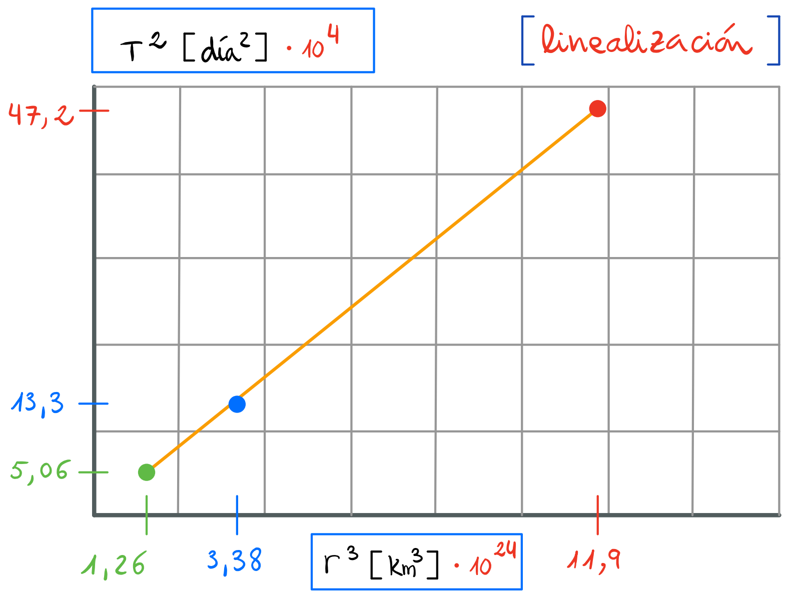
En el movimiento circular $v = \dfrac{2\pi r}{T}$ $\Bigg\}$ $G\dfrac{M}{r} = \left(\dfrac{2\pi r}{T}\right)^2$

$$G\frac{M}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = K} \Rightarrow \boxed{T^2 = K \cdot r^3}$$ magnitudes directamente proporcionales

Si representamos gráficamente T^2 frente a r^3, obtendríamos una línea recta cuya pendiente es K.

[linealización]

relación lineal $\Rightarrow$ proporcional $\Rightarrow$ gráfica recta



	T^2 [día^2]	r^3 [km^3]
Tierra	$133225 \simeq 13{,}3 \cdot 10^4$	$3{,}38 \cdot 10^{24}$
Marte	$471969 \simeq 47{,}2 \cdot 10^4$	$11{,}9 \cdot 10^{24}$
Venus	$50625 \simeq 5{,}06 \cdot 10^4$	$1{,}26 \cdot 10^{24}$

Planeta	T [días]	r $[km]$
Tierra	365	$1{,}5 \cdot 10^8$
Marte	687	$2{,}28 \cdot 10^8$
Venus	225	$1{,}08 \cdot 10^8$

La masa del Sol es $M_\odot = \dfrac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$, Pasamos a unidades S.I.

Con los datos de : Tierra $\quad M_\odot = \dfrac{4\cdot\pi^2\cdot(1{,}5\cdot 10^{11})^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(365\cdot 24\cdot 3600)^2} \approx 2.008610\times 10^{30}$ kg

Con los datos de : Marte $\quad M_\odot = \dfrac{4\cdot\pi^2\cdot(2{,}28\cdot 10^{11})^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(687\cdot 24\cdot 3600)^2} \approx 1.991120\times 10^{30}$ kg

Con los datos de : Venus $\quad M_\odot = \dfrac{4\cdot\pi^2\cdot(1{,}08\cdot 10^{11})^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(225\cdot 24\cdot 3600)^2} \approx 1.972930\times 10^{30}$ kg

La media de la masa del Sol $\quad M_\odot = \dfrac{2{,}0086 + 1{,}9911 + 1{,}9729}{3} \cdot 10^{30}$ kg $= 1{,}9909 \cdot 10^{30}$ kg

$M_\odot \simeq 2 \cdot 10^{30}$ kg

Un análisis de errores más riguroso implica el cálculo de la **desviación estándar**:

Medida: x_i	**Desviación absoluta:** $\left| x_i - \bar{x} \right|$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2$
Media: $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$	**Desviación estándar:** $\sigma = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}$	

	$M_\odot$ [kg]	$\left\| M_\odot - \overline{M}_\odot \right\|$	$\left(M_\odot - \overline{M}_\odot \right)^2$
Tierra	$2{,}00861 \cdot 10^{30}$	$1{,}771 \cdot 10^{28}$	$3{,}13644 \cdot 10^{56}$
Marte	$1{,}99112 \cdot 10^{30}$	$2{,}2 \cdot 10^{26}$	$4{,}84 \cdot 10^{52}$
Venus	$1{,}97293 \cdot 10^{30}$	$1{,}797 \cdot 10^{28}$	$3{,}22921 \cdot 10^{56}$

$\overline{M}_\odot \simeq 1{,}9909 \cdot 10^{30}$ kg (valor medio o media aritmética)

Tomo 4 decimales arbitrariamente

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}}$$

Desviación estándar: cuantifica la incertidumbre de la medida.

$$n = 3 \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{3-1} \cdot \left(3{,}13644 \cdot 10^{56} + 4{,}84 \cdot 10^{52} + 3{,}22921 \cdot 10^{56}\right)}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (3{,}13644 \cdot 10^{56} + 4{,}84 \cdot 10^{52} + 3{,}2292 \cdot 10^{56})} \approx 1.784110 \times 10^{28} \text{ kg} \simeq 1{,}7841 \cdot 10^{28} \text{ kg}$$

Tomo 4 decimales porque son los mismos que la media aritmética

La medida se expresa como media ± incertidumbre : $\bar{x} \pm \sigma$,

En nuestro caso $\overline{M}_\odot \pm \sigma = 1{,}9909 \cdot 10^{30} \text{ kg} \pm 1{,}7841 \cdot 10^{28} \text{ kg}$

Se redondea la incertidumbre a una o dos cifras significativas.

El resultado queda más claro si lo expreso todo bajo la misma potencia con el mismo número de decimales.

$$\overline{M}_\odot \pm \sigma = (1{,}99 \pm 0{,}02) \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

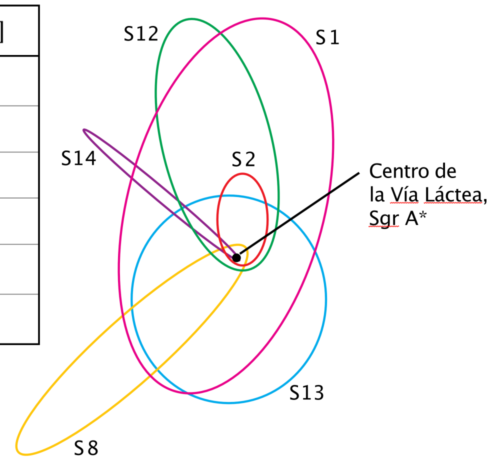
El error relativo $\boxed{E_r = \frac{\sigma}{\overline{M}_\odot} \cdot 100} = \frac{0{,}02}{1{,}99} \cdot 100 = 1{,}005\,\%$ es pequeño (buen resultado).

Práctica 3: En el centro de la Vía Láctea se encuentra el agujero negro supermasivo Sagitario A*. Está situado en el foco común de las órbitas elípticas de más de doscientas estrellas que lo orbitan. Calcula la masa de Sgr A* a partir de las medidas del radio medio orbital, r, y del período, T, de seis estrellas que lo orbitan (ver tabla adjunta). Realiza también el cálculo a partir de la gráfica de T^2 frente a r^3.

$1\ UA = 1{,}5 \cdot 10^8\ km$ (distancia Sol-Tierra).

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$

Estrella	T [años]	r [UA]
S1	94,1	3300
S2	15,2	980
S8	67,2	2630
S12	54,4	2290
S13	36	1750
S14	38	1800



De acuerdo con la condición de órbita $F_g = F_c$

$$G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow G\frac{M}{r} = v^2$$

En el movimiento circular $v = \dfrac{2\pi r}{T}$

$$G\frac{M}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

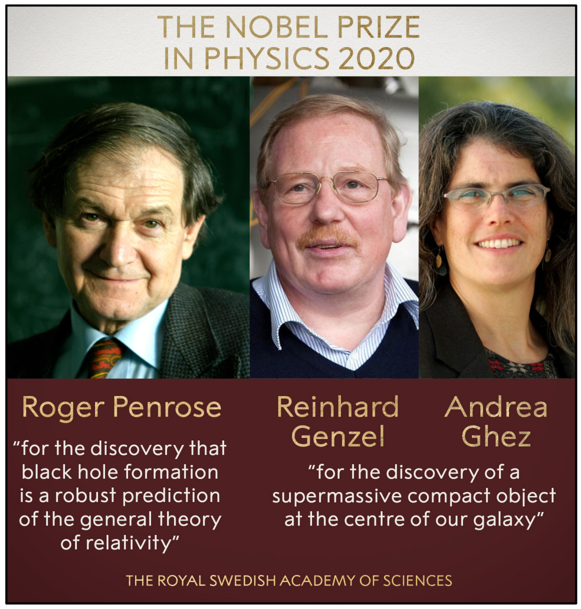
$$G\frac{M}{r} \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = K} \Rightarrow \boxed{T^2 = K\cdot r^3}$$

magnitudes directamente proporcionales

Si representamos gráficamente T^2 frente a r^3, obtendríamos una línea recta cuya pendiente es K.

	T^2 [año^2]	r^3 [UA^3]
S_1	$8854{,}81 \simeq 8{,}85 \cdot 10^3$	$10{,}9 \cdot 10^6$
S_2	$231{,}04 \simeq 0{,}231 \cdot 10^3$	$0{,}96 \cdot 10^6$
S_8	$4515{,}84 \simeq 4{,}52 \cdot 10^3$	$6{,}92 \cdot 10^6$
S_{12}	$2959{,}36 \simeq 2{,}96 \cdot 10^3$	$5{,}24 \cdot 10^6$
S_{13}	$1296 \simeq 1{,}3 \cdot 10^3$	$3{,}06 \cdot 10^6$
S_{14}	$1444 \simeq 1{,}44 \cdot 10^3$	$3{,}24 \cdot 10^6$

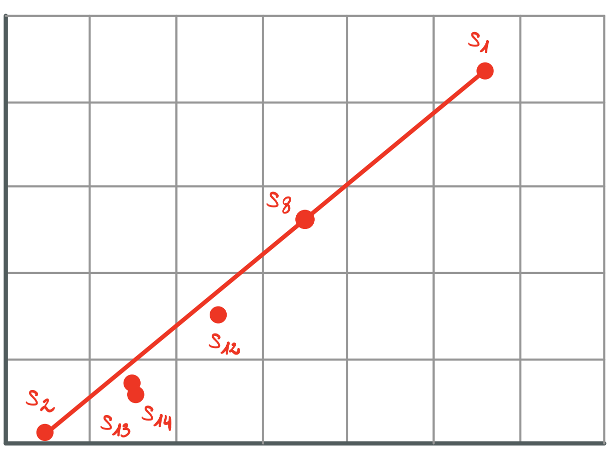
relación lineal ⇒ proporcional ⇒ gráfica recta




Stephen Hawking


Andreas Eckart

$\boxed{T^2\,[\text{año}^2]\cdot 10^3}$ [Linealización]

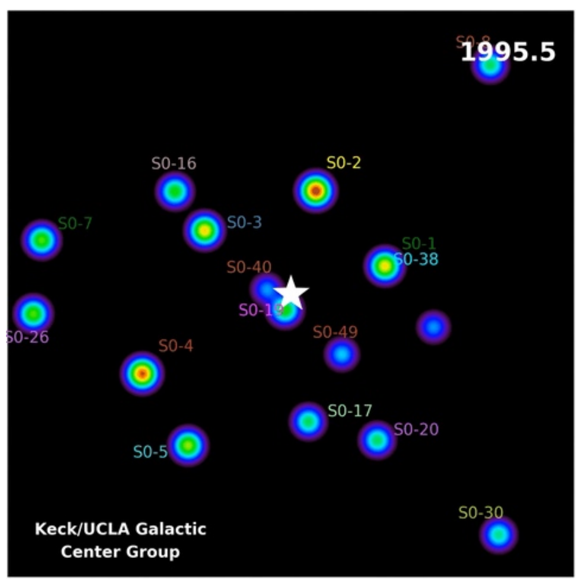


$\boxed{r^3\,[\text{UA}^3]\cdot 10^6}$

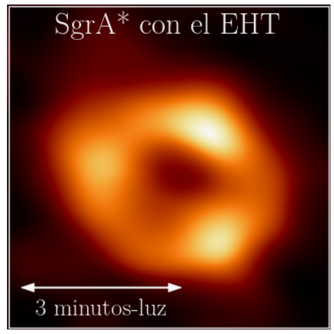
La pendiente de la recta $K = \dfrac{4\pi^2}{G\cdot M_{A^*}}$

$$M_{A^*} = \frac{4\pi^2}{G\cdot K}$$

Podemos inferir la masa a partir de la gráfica.



Podemos también calcular la masa de Sgt A* analíticamente: $M_{A^*} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$, Pasamos a unidades S.I.



EHT Event Horizon Telescope, 2022

Con los datos de: S_1 $\Rightarrow$ $M_{A^*} = \frac{4\cdot\pi^2\cdot(3300\cdot1{,}5\cdot10^{11})^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot(94{,}1\cdot365\cdot24\cdot3600)^2} \approx 8.151870\times10^{36}$ kg

Con los datos de: S_2 $\Rightarrow$ $M_{A^*} = \frac{4\cdot\pi^2\cdot(980\cdot1{,}5\cdot10^{11})^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot(15{,}2\cdot365\cdot24\cdot3600)^2} \approx 8.182490\times10^{36}$ kg

Con los datos de: S_8 $\Rightarrow$ $M_{A^*} = \frac{4\cdot\pi^2\cdot(2630\cdot1{,}5\cdot10^{11})^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot(67{,}2\cdot365\cdot24\cdot3600)^2} \approx 8.091390\times10^{36}$ kg

Con los datos de: S_{12} $\Rightarrow$ $M_{A^*} = \frac{4\cdot\pi^2\cdot(2290\cdot1{,}5\cdot10^{11})^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot(54{,}4\cdot365\cdot24\cdot3600)^2} \approx 8.150850\times10^{36}$ kg

Con los datos de: S_{13} $\Rightarrow$ $M_{A^*} = \frac{4\cdot\pi^2\cdot(1750\cdot1{,}5\cdot10^{11})^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot(36\cdot365\cdot24\cdot3600)^2} \approx 8.306220\times10^{36}$ kg

Con los datos de: S_{14} $\Rightarrow$ $M_{A^*} = \frac{4\cdot\pi^2\cdot(1800\cdot1{,}5\cdot10^{11})^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot(38\cdot365\cdot24\cdot3600)^2} \approx 8.112320\times10^{36}$ kg

La media de la masa Sgt A* $\overline{M}_{A^*} = \frac{8{,}15+8{,}18+8{,}09+8{,}15+8{,}31+8{,}11}{6}\cdot10^{36} = 8.165\times10^{36} \simeq 8{,}2\cdot10^{36}$ kg

Tomo 1 decimal arbitrariamente

Si tenemos en cuenta que la masa del Sol $M_\odot \simeq 2\cdot10^{30}$ kg

la masa del agujero negro Sgt A* equivale a: $\frac{\overline{M}_{A^*}}{M_\odot} = \frac{8{,}2\cdot10^{36}\,\cancel{kg}}{2\cdot10^{30}\,\cancel{kg}} = 4{,}1\cdot10^{6}$, es decir, 4,1 millones de masas solares

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}$$

Desviación estándar: cuantifica la incertidumbre de la medida.

$n = 6$

$$\sigma = \left(\frac{(8{,}15-8{,}2)^2+(8{,}18-8{,}2)^2+(8{,}09-8{,}2)^2+(8{,}15-8{,}2)^2+(8{,}31-8{,}2)^2+(8{,}11-8{,}2)^2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot10^{36} \approx 8.683320\times10^{34}\text{ kg} \simeq 8{,}7\cdot10^{34}\text{ kg}$$

La medida se expresa como media ± incertidumbre: $\bar{x} \pm \sigma$,

Se redondea la incertidumbre a una o dos cifras significativas y lo expresamos en notación científica bajo la misma potencia.

En nuestro caso $\overline{M}_{A^*} \pm \sigma = 8{,}2\cdot10^{36}\text{ kg} \pm 8{,}7\cdot10^{34}\text{ kg} \simeq (8{,}17 \pm 0{,}09)\cdot10^{36}$ kg

El error relativo $\boxed{E_r = \frac{\sigma}{\overline{M}_{A^*}}\cdot100} = \frac{9}{820}\cdot100 = 1{,}1\ \%$

Ejercicio 7: Cuestión: ¿De qué diferentes maneras podríamos calcular la masa de La Tierra?

MÉTODO I

Podríamos utilizar, el período orbital Tierra-Luna y la distancia.

Datos: $d_{T-L} = 384400$ km, $T = 27{,}32$ días, G

$$M_T = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 \cdot G} \simeq 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$M_T = \frac{4 \times \pi^2 \times (3.84 \times 10^8)^3}{(27.32 \times 24 \times 3600)^2 \times 6.67 \times 10^{-11}} \approx 6.01504 \times 10^{24} \text{ kg}$$

MÉTODO II

Podríamos utilizar el valor del campo en la superficie terrestre y el radio de la Tierra.

Datos: $g_0 = 9{,}81 m/s^2$, $R_T = 6370$ km, G

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} \Rightarrow M_T = \frac{g_0 R_T^2}{G} = 5{,}97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \simeq 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Se puede apreciar por el orden de magnitud que: $M_\odot \sim 10^6 M_T$

El sol es 1 millón de veces más masivo que La Tierra.

Relación entre los volúmenes de La Tierra y El Sol.

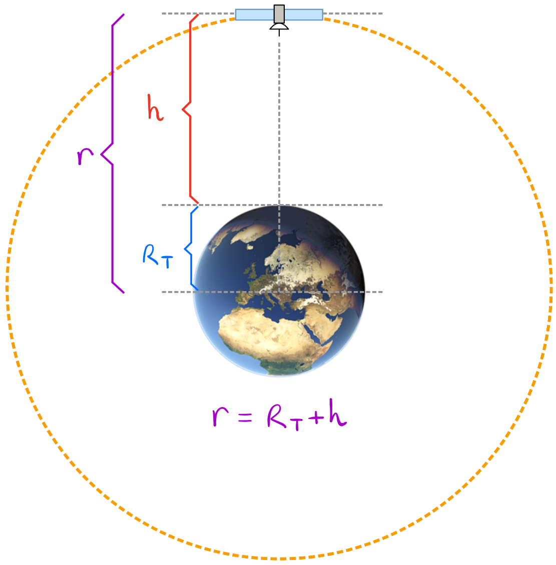
$R_\odot = 695.500$ km

$$\frac{V_S}{V_T} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_\odot^3}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{(695500)^3}{(6370)^3} \approx 1301586.71132 \Rightarrow V_\odot \simeq 1{,}3 \cdot 10^6 \, V_T$$

aceleración centrípeta = campo gravitatorio
La taikonauta china Wang Yaping (王亚平) en la estación espacial Tiangong 天宫 (Tianhe 天和)

Ejercicio 8: Calcula a qué altura se halla un satélite geoestacionario (que mantiene su posición sobre un mismo punto de la Tierra; su periodo orbital es pues de 24 *horas*). Calcula su velocidad orbital.
Datos: $g_0 = 9{,}81 \ m/s^2$, $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6 \ m$

$\boxed{F_g = F_c}$ Condición de órbita



$$G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \qquad v = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}} = \frac{2\pi r}{T}$$

$$G\frac{M}{r} = v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \qquad g_0 = G\frac{M}{R_T^2} \Rightarrow GM = g_0 R_T^2$$

$$g_0 R_T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2}$$

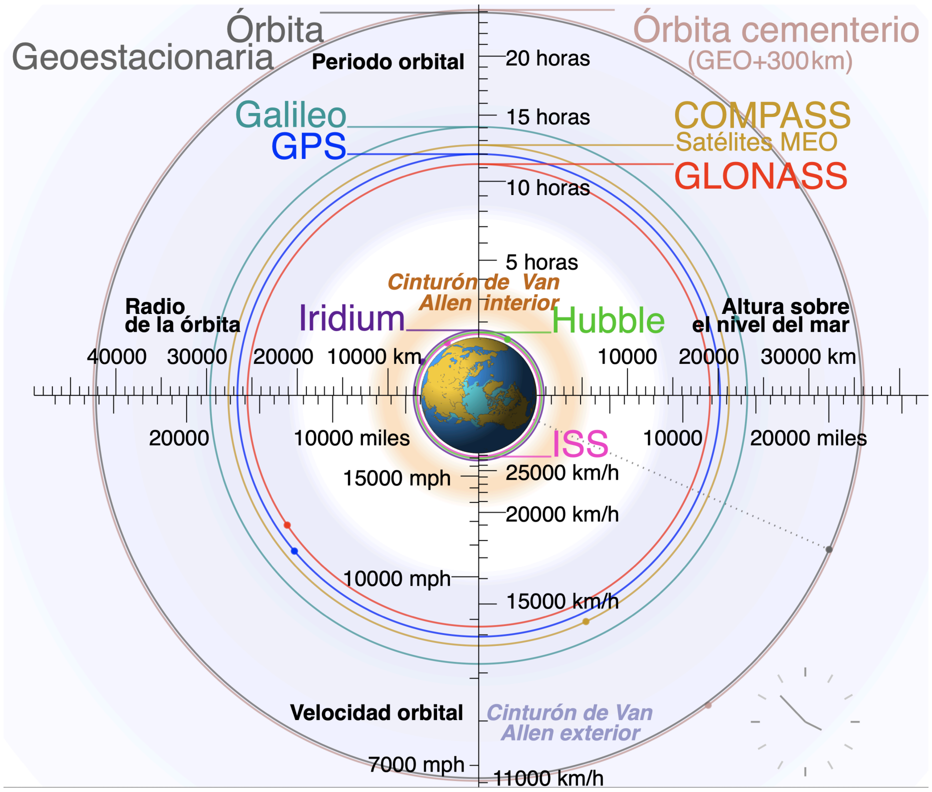
$$T = 24\cancel{h} \cdot 3600 \frac{s}{\cancel{h}} = 86400 \text{ s}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{g_0 R_T^2 T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{9.81 \times (6{,}37 \times 10^6)^2 \times (86400)^2}{4 \times \pi^2}} \approx 42221974.59516 \text{ m}$$

$$r \simeq 4{,}2 \cdot 10^7 \text{ m} = 42000 \text{ km}$$

$$r = R_T + h \Rightarrow h = 42000 \text{ km} - 6370 \text{ km}$$

$$h \simeq 35600 \text{ km} \simeq 36000 \text{ km}$$



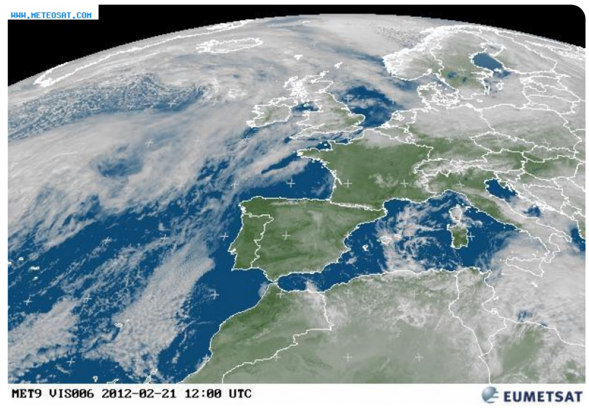
Características de las órbitas de los satélites

La velocidad lineal:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 4{,}2 \cdot 10^7\ m}{86400\ s}$$

$$v = \frac{2\times\pi\times4.2\times10^7}{86400} \approx 3054.32619\ m/s$$

$$v \simeq 3{,}05\ \frac{km}{s} \cdot 3600\ \frac{s}{h} = 10980\ km/h$$



Fotografía de un satélite geoestacionario meteorológico Meteosat

METEOSAT http://www.meteosat.com

Ejercicio 9: Galileo observó las lunas de Júpiter en 1610. Descubrió que Ío, el satélite más cercano a Júpiter que pudo observar en su época, poseía un período orbital de $1{,}8$ *días*, y estimó que el radio de su órbita era 3 veces el diámetro de Júpiter.
Asimismo, encontró que el período orbital de Calisto (la cuarta luna más alejada de Júpiter) era de $16{,}7$ *días*. Con estos datos, suponiendo órbitas circulares y utilizando el dato de que el radio de Júpiter es de $7{,}15 \cdot 10^7\ m$. Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$

a) Calcula la masa de Júpiter
b) Determina el radio de la órbita de Calisto.

La condición de órbita es: $F_g = F_c \Rightarrow G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow G\frac{M}{r} = v^2$

En el movimiento circular $v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow G\frac{M}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = cte}$

3ª ley de Kepler
$M \equiv$ Masa de Júpiter

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{G T^2} = \frac{4\times\pi^2\times(3\times2\times7{,}15\times10^7)^3}{6{,}67\times10^{-11}\times(1{,}8\times24\times3600)^2} \approx 1.932120\times10^{27}\ kg \simeq 1{,}93\cdot10^{27}\ kg$$

(del orden de 10^3 veces la Tierra)

$r = 3\cdot2\cdot7{,}15\cdot10^7\ m$

$1\ día \cdot \frac{24\ h}{1\ día}\cdot\frac{3600\ s}{1\ h}$

Para calcular el radio orbital de Calisto emplearemos la 3ª ley de Kepler:

$$\frac{T^2}{r^3} = cte \Rightarrow \frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \Rightarrow \frac{(1{,}8\ día)^2}{(4{,}29\cdot10^8\ m)^3} = \frac{(16{,}7\ día)^2}{r_{calisto}^3} \Rightarrow r_{calisto} = \sqrt[3]{\frac{(16{,}7)^2\times(4{,}29\times10^8)^3}{(1{,}8)^2}} \approx 1894174284.167603\ m$$

$3\cdot2\cdot7{,}15\cdot10^7\ m = 4{,}29\cdot10^8\ m$

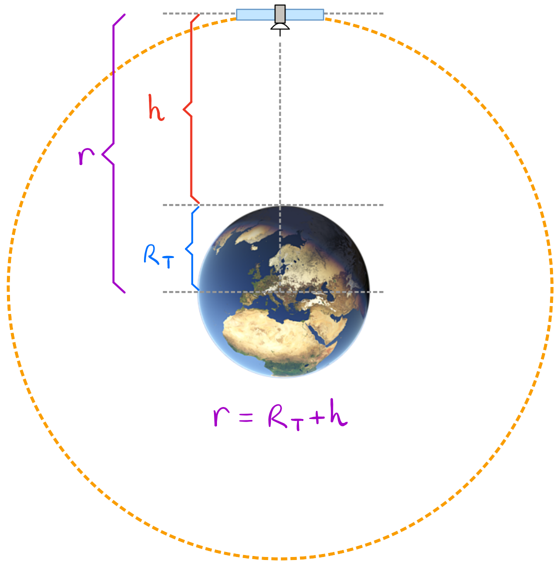
Radio orbital de Calisto: $r_{calisto} \simeq 1{,}89\cdot10^9\ m$

Ejercicio 10: El 4 de octubre de 1957 la URSS lanzó al espacio el primer satélite artificial, el Sputnik 1. Este describía una órbita de 586 km de altura sobre la superficie terrestre. Suponiendo que la órbita era circular, calcula:

a) El período de rotación del satélite en su órbita alrededor de la Tierra.

b) La velocidad a la que giraba el Sputnik y la aceleración centrípeta en la órbita.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$, $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6\ m$, $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}\ kg$



$\boxed{F_g = F_c}$ Condición de órbita $\quad v = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}} = \frac{2\pi r}{T}$

$$G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow G\frac{M}{r} = v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2(R_T+h)^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\times\pi^2\times((6370+586)\times10^3)^3}{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}97\times10^{24}}} \approx 5776.558101\ s$$

$T \simeq 1{,}6\ h$

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\times\pi\times(6370+586)\times10^3}{5777} \approx 7565.490219\ m/s$$

$v \simeq 7565\ \frac{m}{s} \simeq 27234\ km/h$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{7565^2}{(6370+586)\times10^3} \approx 8.227318\ m/s^2 \simeq 8{,}23\ m/s^2$$

Lógicamente la $\boxed{a_c = g}$ Si calculo $g = G\frac{M}{r^2} = 6{,}67\times10^{-11}\times\frac{5{,}97\times10^{24}}{((6370+586)\times10^3)^2} \approx 8.229643\ m/s^2$

$\simeq 8{,}23\ m/s^2$

Ejercicio 11: Calcula cuál es la razón entre tu peso en La Tierra y tu peso en Marte y en Júpiter.

Datos: $R_{Tierra} = 6370\ km$

$R_{Marte} = 3397\ km$, $M_{Marte} = 0{,}107 \cdot M_{Tierra}$

$R_{Jupiter} = 71492\ km$, $M_{Jupiter} = 318 \cdot M_{Tierra}$

$P = mg = m \cdot G\frac{M}{R^2} \leftarrow$ En la superficie, la distancia es el radio

$$\frac{P_T}{P_M} = \frac{\cancel{m}\cdot\cancel{G}\cdot\frac{M_T}{R_T^2}}{\cancel{m}\cdot\cancel{G}\cdot\frac{M_m}{R_m^2}} = \frac{M_T \cdot R_m^2}{M_m \cdot R_T^2} = \frac{\cancel{M_T}\cdot R_m^2}{0{,}107\,\cancel{M_T}\cdot R_T^2} = 2{,}66 \Rightarrow P_T = 2{,}66\,P_m$$

Ejercicio 12: Calcula el punto de equilibrio gravitatorio (campo nulo) entre la Tierra y la Luna. Dato: $M_T = 81 \cdot M_L$

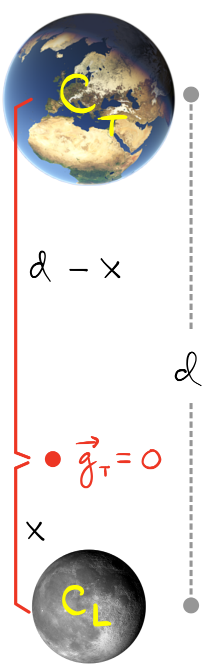
Pricipio de superposición

Planteamiento

$$\boxed{\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \ldots}$$

En el punto de equilibrio $g_T - g_L = 0 \Rightarrow g_T = g_L$

Gráfico de situación



$$\cancel{G}\cdot\frac{M_T}{(d-x)^2} = \cancel{G}\cdot\frac{M_L}{x^2}$$; Extraemos la raíz cuadrada en ambos términos para eliminar los cuadrados.

I^{er} método: Uso la relación: $M_T = 81 \cdot M_L$

Resolución $\quad \frac{81\cdot\cancel{M_L}}{(d-x)^2} = \frac{\cancel{M_L}}{x^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{81}{(d-x)^2}} = \sqrt{\frac{1}{x^2}} \Rightarrow \frac{9}{d-x} = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow 9x = d - x \Rightarrow 10x = d \quad x = 0{,}1\,d \ ,\ d - x = 0{,}9\,d$ (más cerca de la Luna)

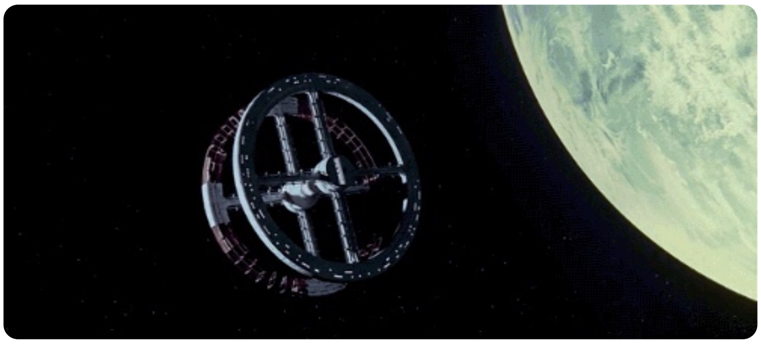
El resultado tiene sentido

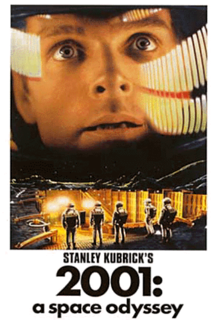
II^{o} método: Si no conozco la relación entre las masas:

Resolución $\quad \frac{M_T}{(d-x)^2} = \frac{M_L}{x^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{M_T}{(d-x)^2}} = \sqrt{\frac{M_L}{x^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{M_T}}{d-x} = \frac{\sqrt{M_L}}{x}$

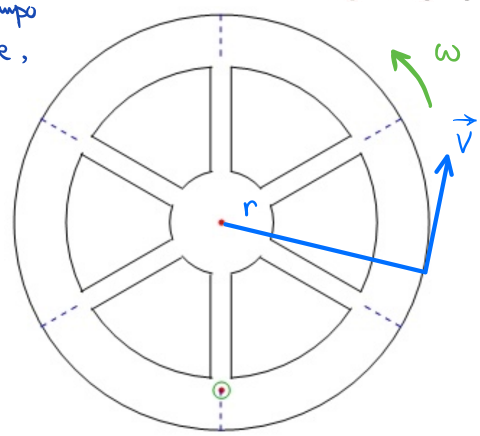
$$\Rightarrow x\sqrt{M_T} = (d-x)\sqrt{M_L} \Rightarrow x\sqrt{M_T} + x\sqrt{M_L} = d\sqrt{M_L} \Rightarrow x = \frac{d\sqrt{M_L}}{\sqrt{M_T}+\sqrt{M_L}}$$

Cómo conseguir gravedad artificial con un movimiento angular o de rotación





En la película 2001 una odisea en el espacio de Stanley Kubrick (1968), se ilustra la posibilidad de construir una nave espacial rotando sobre su propio eje de modo que la aceleración centrípeta iguale al campo gravitatorio terrestre, es decir, $a_c = g_0$



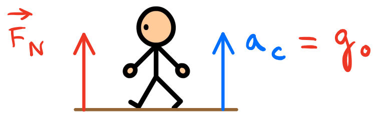
Como $a_c = \dfrac{v^2}{r}$ y $v = \omega \cdot r$ resulta:

$$a_c = \frac{\omega^2 r^{\cancel{2}}}{\cancel{r}} = \omega^2 r \text{ , si igualamos } a_c = g_0 \Rightarrow \omega^2 r = g_0$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g_0}{r}}}$$

Velocidad angular de rotación

$r \equiv$ radio de la nave



$\vec{F}_N$ es la reacción normal al suelo que te hace sentir el peso.

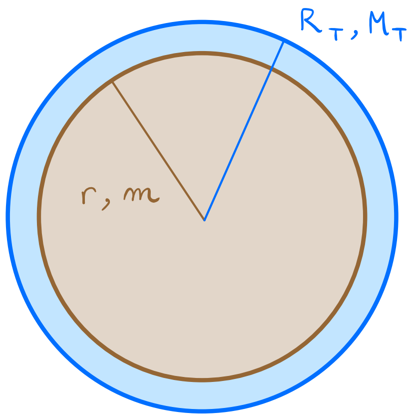
Campo gravitatorio en el interior de La Tierra

$$\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}_r}$$

Campo gravitatorio (forma vectorial)

$$\boxed{S_{esfera} = 4\pi r^2}$$

$$\boxed{V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3}$$



$\boxed{g_0 = G \cdot \dfrac{M_T}{R_T^2}}$; Supongamos una densidad constante:

$$\rho = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} \Rightarrow M_T = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_T$$

$$g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = \frac{\rho_T \cdot \frac{4}{3}\pi R_T^3}{R_T^2} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_T$$

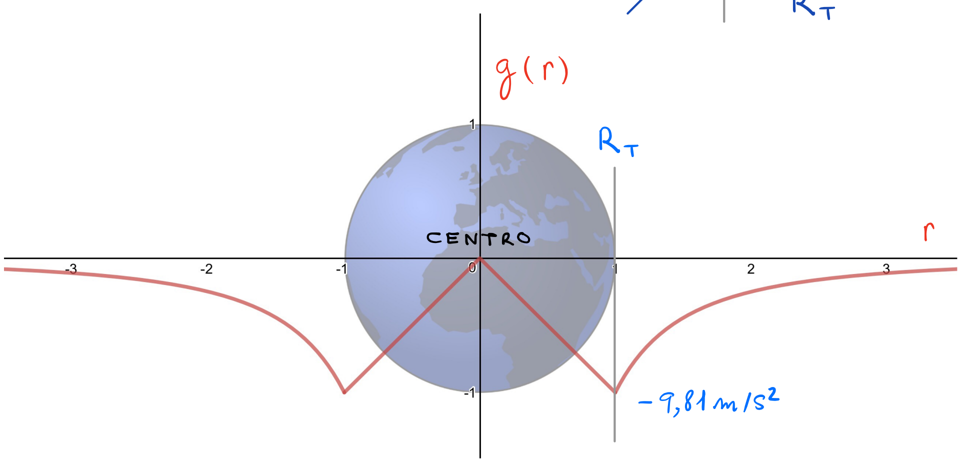
$$g_{int} = G \cdot \frac{m}{r^2} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r$$

$$\frac{g_{int}}{g_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r}{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_T} = \frac{r}{R_T}$$

$$g_{int} = \frac{g_0}{R_T} \cdot r$$

$$\frac{g_0}{R_T} = \text{cte} \Rightarrow \boxed{g_{int} = \left(\frac{g_0}{R_T}\right) \cdot r}$$

Campo en el interior (ec. recta)



Campo gravitatorio dentro y fuera

$$\boxed{g(r) = \begin{cases} G \cdot \dfrac{M_T}{r^2} & \text{si } r \geq R_T \\ \left(\dfrac{g_0}{R_T}\right) \cdot r & \text{si } r < R_T \end{cases}}$$

✏️ Actividades sobre el campo en el interior de un planeta

Ejercicio 13: Un planeta esférico tiene la misma densidad media que la Tierra, pero la mitad de radio. Calcula la aceleración en su superficie, el período orbital de un satélite situado a $400\ km$ de altura y el valor del campo en el interior del planeta. Datos: $g_0 = 9{,}81\ m/s^2$, $R_T = 6370\ km$

$R_T,\ g_0,\ R_p = \frac{R_T}{2}$

Densidades: $\rho_p = \rho_T \Rightarrow \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{M_p}{\frac{4}{3}\pi R_p^3} \Rightarrow \frac{M_T}{R_T^3} = \frac{M_p}{\left(\frac{R_T^3}{2^3}\right)} = \frac{8M_p}{R_T^3} \Rightarrow M_T = 8M_p$

Campos: $g = G\cdot\frac{M_p}{R_p^2}$; $g_0 = G\cdot\frac{M_T}{R_T^2}$

$$g_p = G\cdot\frac{\left(\frac{M_T}{8}\right)}{\left(\frac{R_T^2}{2^2}\right)} = G\cdot\frac{M_T}{R_T^2}\cdot\frac{4}{8} = g_0\cdot\frac{1}{2} = \frac{g_0}{2} = \frac{9{,}8}{2} = 4{,}9\ m/s^2$$

$r = R_p + h = \frac{6370\,km}{2} + 400\,km = 3585\ km$; $F_g = F_c$ Condición de órbita del satélite.

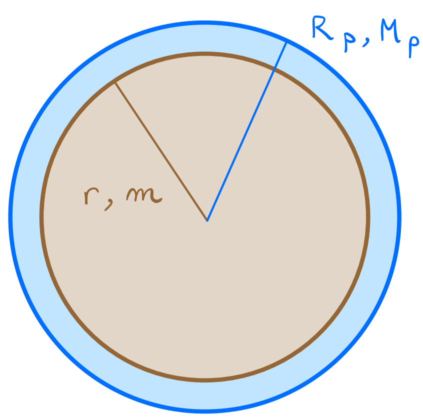
$G\frac{M_p\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$; $v = \frac{2\pi r}{T}$

$G\frac{M_p}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_p}$

$g_p = G\cdot\frac{M_p}{R_p^2} \Rightarrow G\cdot M_p = g_p\cdot R_p^2 \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{g_p\cdot R_p^2}$

$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{g_p\cdot R_p^2}} = \sqrt{\frac{4\times\pi^2\times(3585\times10^3)^3}{4.9\times(3185\times10^3)^2}} \approx 6049.31405\ s$ Período orbital. $T \simeq 6049\,s \simeq 1{,}68\,h$

Cálculo del campo en el interior del planeta P:



$g_{0p} = G\frac{M_p}{R_p^2} = 4{,}9\,m/s^2$

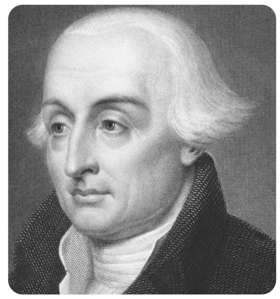
$g_{int} = G\frac{m}{r^2}$

$\rho = \frac{M_p}{\frac{4}{3}\pi R_p^3} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow m = M_p\cdot\frac{r^3}{R_p^3}$

$$g_{int} = G\cdot\frac{M_p\cdot\frac{r^{\cancel{3}}}{R_p^3}}{\cancel{r^2}} = G\frac{M_p}{R_p^3}\cdot r$$

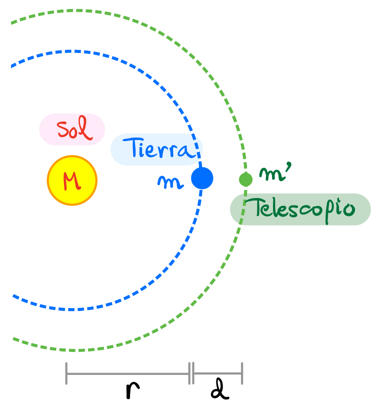
Como $g_{0p} = G\frac{M_p}{R_p^2} \Rightarrow g_{int} = \frac{g_{0p}}{R_p}\cdot r$

Puntos de Lagrange. Punto L2 y su importancia en algunos telescopios espaciales


Joseph-Louis Lagrange (Giuseppe Lodovico Lagrangia)

El físico y matemático italiano Joseph-Louis Lagrange (versión en francés de su nombre original en italiano) calculó los llamados puntos de Lagrange o puntos de libración L. Estos puntos marcan las posiciones donde la atracción gravitatoria combinada de dos masas grandes (por ejemplo el Sol y la Tierra) proporciona la fuerza centrípeta necesaria para rotar sincrónicamente con una masa mucho menor (por ejemplo un telescopio espacial).

Vamos a considerar el punto Lagrange L2 que corresponde a una masa pequeña más allá del sistema Sol – Tierra.



La relación entre masas es $M \gg m \gg m'$ (masa Sol mucho mayor que la de la Tierra que a su vez es mucho mayor que la de m').

Calculemos la condición de órbita para la Tierra: $\boxed{F_g = F_c} \Rightarrow$

$$G\cdot\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\,\frac{v_1^2}{\cancel{r}} \Rightarrow G\cdot\frac{M}{r} = v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

Velocidad orbital de la Tierra

Para calcular la condición de órbita para la masa m' sumaremos las fuerzas de M y m; despreciamos el efecto de m' sobre M y m.

$$\boxed{G\cdot\frac{M\cdot m'}{(r+d)^2} + G\cdot\frac{m\cdot m'}{d^2} = m'\cdot\frac{v_2^2}{r+d}}$$

Velocidad orbital de m'

$$\begin{cases} r \equiv \text{distancia Sol – Tierra} \\ d \equiv \text{distancia Tierra a } m' \end{cases}$$

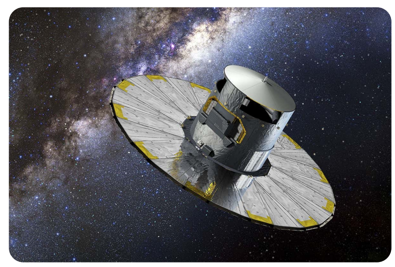
Este tirón gravitatorio adicional provoca que a cierta distancia d, en vez de ralentizarse la órbita de m', va a girar sincrónicamente con la misma velocidad angular que la Tierra: $\omega_1 = \omega_2$

La relación entre las velocidades angular y lineal: $v = \omega\cdot r \Rightarrow \omega = v/r$

$$\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow \frac{v_1}{r} = \frac{v_2}{r+d} \quad ; \quad \text{sustituimos } v_1 = \sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

$$v_2 = \frac{v_1\cdot(r+d)}{r} = \frac{r+d}{r}\cdot\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}} \quad ;$$

sustituimos en la ecuación de la Velocidad orbital de m':


Misión Gaia (astrometría de la galaxia)
ESA (Agencia Espacial Europea)

$$\cancel{G}\cdot\frac{M\cdot\cancel{m'}}{(r+d)^2} + \cancel{G}\cdot\frac{m\cdot\cancel{m'}}{d^2} = m'\cdot\frac{1}{r+d}\cdot\left(\frac{r+d}{r}\cdot\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}\right)^2 = m'\cdot\frac{r+d}{r^2}\cdot\frac{G\cdot M}{r} = \cancel{G}M\cancel{m'}\cdot\frac{r+d}{r^3}$$

$$\frac{M}{(r+d)^2} + \frac{m}{d^2} = M\cdot\frac{r+d}{r^3} \Rightarrow \boxed{\frac{M}{(r+d)^2} + \frac{m}{d^2} - M\cdot\frac{r+d}{r^3} = 0}$$

Relación del punto Lagrange 2

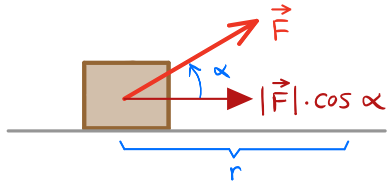
Con datos:

$$\left.\begin{aligned} M &= 1{,}99\cdot 10^{30}\ \text{kg (Sol)} \\ m &= 5{,}97\cdot 10^{24}\ \text{kg (Tierra)} \\ r &= 1\ \text{UA} = 1{,}52\cdot 10^{8}\ \text{km} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$d \simeq 1{,}52\cdot 10^6$ km
Ésta es la distancia a la que se han situado los telescopios espaciales Gaia y James Webb, para así tener su temperatura muy baja y al mismo tiempo mantener las comunicaciones con La Tierra.


Telescopio espacial James Webb
NASA / ESA / CSA

Energía cinética y teorema de las fuerzas vivas



El trabajo se calcula como $\boxed{W = \vec{F}\cdot\vec{r}}$ Trabajo [J] [$1J = 1N\cdot 1m$]

$\boxed{W = |\vec{F}|\cdot|\Delta\vec{r}|\cdot\cos\alpha} = F\cdot\Delta r\cdot\cos\alpha$ (producto escalar de la fuerza por el desplazamiento).

Si la fuerza varía (depende de la posición), no podemos multiplicar directamente sino que hay que sumar todas las contribuciones en cada punto, es decir, calcular la integral desde el punto inicial hasta el punto final del desplazamiento.

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} \implies \int_1^2 dW = \int_{r_1}^{r_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} \quad \text{donde} \quad \int_1^2 dW = [W]_1^2 = W_{1\to 2}$$

Calculemos el trabajo para ir de 1 a 2 para cualquier tipo de fuerza. Se cumple la 2ª ley de Newton:

$$\boxed{\vec{F} = m\cdot\vec{a} = m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}},$$

$$W_{1\to 2} = \int_{r_1}^{r_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = \int_{v_1}^{v_2} m\cdot\vec{v}\,d\vec{v} = m\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Cambio la variable de integración y los límites

$\vec{v}^2 = |\vec{v}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos 0 = v^2$

Definimos la energía cinética como una función de estado que sólo depende del módulo de la velocidad en cada punto; obviamente es un escalar (número) y no un vector. $\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2}$ Energía cinética [J]

$$W_{1\to 2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{c_2} - E_{c_1} = \Delta E_c$$

Hemos demostrado un resultado universal. En todo tipo de procesos y fuerzas, el trabajo realizado entre dos puntos es igual al incremento de Energía cinética. $\boxed{W_{1\to 2} = \Delta E_c}$ Teorema de las fuerzas vivas

Se cumple siempre, aunque haya fuerzas disipativas como el rozamiento, porque no hemos puesto ninguna condición en la demostración.

Energía potencial gravitatoria

Trabajo = Fuerza · desplazamiento

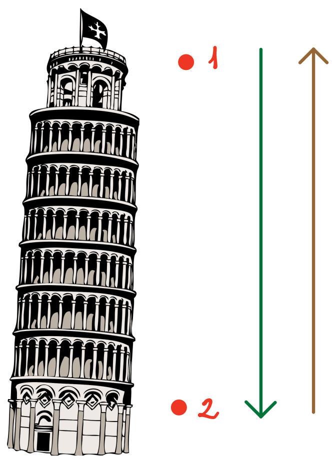
$$\boxed{W = |\vec{F}|\cdot|\Delta\vec{r}|\cdot\cos\alpha} = F\cdot\Delta r\cdot\cos\alpha$$

Trabajo (Julios) $[1J = 1N\cdot 1m]$

La fuerza de la gravedad es central:

$\vec{F} \parallel \Delta\vec{r}$ antiparalelos $\vec{F}$ y $\Delta\vec{r}$ forman 180°

Además es una fuerza conservativa.



$$\boxed{W = \Delta E_c = -\Delta E_p}$$ (en el caso de fuerzas conservativas)

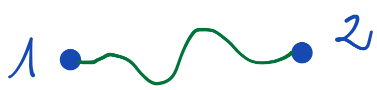
Demostremos que es así al calcular el trabajo realizado por el campo gravitatorio.

$W_g = -\Delta E_p$

$\uparrow$ $W_g = F\cdot\Delta r\cdot\cos 180° < 0$, $\Delta E_p > 0$ $\Big\}$ $W_g < 0$ El trabajo lo realiza una fuerza externa en contra del campo.

$\downarrow$ $W_g = F\cdot\Delta r\cdot\cos 0° > 0$, $\Delta E_p < 0$ $\Big\}$ $W_g > 0$ El trabajo lo realiza el campo (a favor del campo).

La fuerza varía en todo momento, punto a punto. No es constante. Para calcular el trabajo debemos calcular la integral de camino:



$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\,d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} -G\frac{Mm}{r^2}\,dr = -GMm\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}\,dr = -GMm\left[\frac{r^{-2+1}}{-2+1}\right]_{r_1}^{r_2}$$

$$W = -GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1}$$

$$W = \Delta E_C = -\Delta E_p = -E_{p_2} + E_{p_1}$$

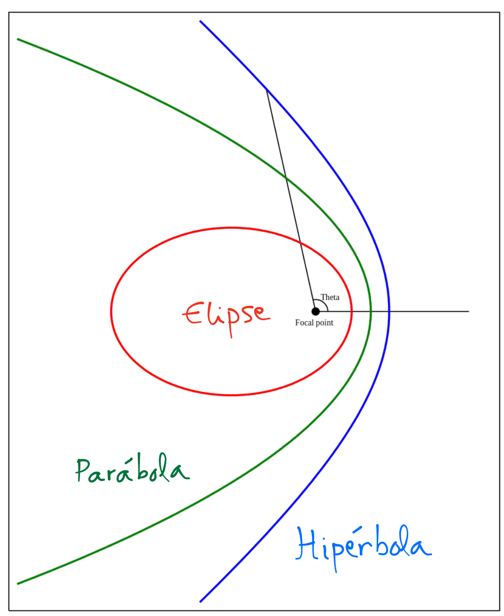
$$\Longrightarrow \boxed{E_p = -G\frac{M\cdot m}{r}}$$

Energía potencial gravitatoria (sólo depende de la posición) [J]

La E_p es siempre negativa y el valor máximo es 0 y se alcanza cuando $r = \infty$.

$E_c = \frac{1}{2}mv^2$	Energía cinética
$E_p = -G\frac{M\cdot m}{r}$	Energía potencial [J]
$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M\cdot m}{r}$	Energía mecánica

Si $E_m > 0 \Rightarrow E_c > E_p$	Escape en trayectoria hiperbólica
Si $E_m = 0 \Rightarrow E_c = E_p$	Escape en trayectoria parabólica
Si $E_m < 0 \Rightarrow E_c < E_p$	Órbita elíptica estable (cerrada)



Cónicas: Órbitas de Kepler

Energía de enlace orbital

Si un cuerpo está atrapado gravitatoriamente, se cumple la condición de órbita:

$$F_g = F_c \Longrightarrow G\,\frac{M \cdot m}{r^{\cancel{2}}} = m\,\frac{v^2}{\cancel{r}} \Longrightarrow m\,v^2 = G\,\frac{M \cdot m}{r}$$

Sustituyendo en la expresión de la energía mecánica: $E_m = E_c + E_p$

$$E_m = \frac{1}{2}\,m v^2 - G\,\frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2}\,G\,\frac{M \cdot m}{r} - G\,\frac{M \cdot m}{r} = -G\,\frac{M \cdot m}{2r} \Longrightarrow$$

$$\boxed{E_m = -G\,\frac{M \cdot m}{2r}}$$ Energía de enlace orbital ; $E_m < 0$

La energía mecánica es negativa, $E_m < 0$, porque hay que gastar energía para alejar el cuerpo de la atracción gravitatoria. Al aumentar el radio orbital, la E_m se hace menos negativa y tiendo a cero, es decir, la E_m aumenta. Para transferir el cuerpo a una órbita de radio mayor, hay que comunicarle energía.

Como se puede apreciar: $E_p = -G\,\dfrac{M \cdot m}{r} \Longrightarrow \boxed{E_m = \frac{1}{2} E_p}$

$$E_c = \frac{1}{2}\,m v^2 \Longrightarrow \boxed{E_c = -\frac{1}{2} E_p}$$

Cuando se generaliza este resultado para muchas partículas, se denomina Teorema del virial

PhET Gravedad y órbitas
https://phet.colorado.edu/sims/html/gravity-and-orbits/latest/gravity-and-orbits_es.html

El campo gravitatorio es un campo de fuerzas conservativo

Cuando una partícula se mueve desde un punto a otro de un campo de fuerzas a lo largo de una trayectoria determinada, el campo de fuerzas realiza un trabajo $W_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}$ (integral de circulación)

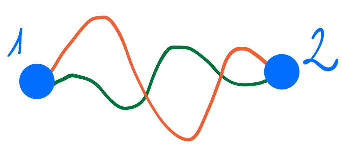
El campo de fuerzas es conservativo si el trabajo NO depende de la trayectoria seguida, es decir, el trabajo sólo depende de los puntos inicial y final.

Como hemos visto, en un campo de fuerzas central como el gravitatorio y el electrostático, el trabajo es la variación de una función escalar (energía potencial) que sólo depende de la distancia a ese punto (posición).

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\Delta E_p = -(E_{p_B} - E_{p_A})$$

Podemos asignar el valor cero de Ep a cualquier punto de referencia, por ejemplo el suelo o el infinito.

$W_{12} = -W_{12}$



Trabajo conservativo

En una trayectoria cerrada

$W = W_{12} + W_{21} = 0$

Energía potencial gravitatoria cerca de la superficie terrestre

Suponemos que $h \ll R_T$

h está muy cerca de la superficie

$$E_p = -G\,\frac{M\cdot m}{r} \quad \text{(función de estado / posición)}$$

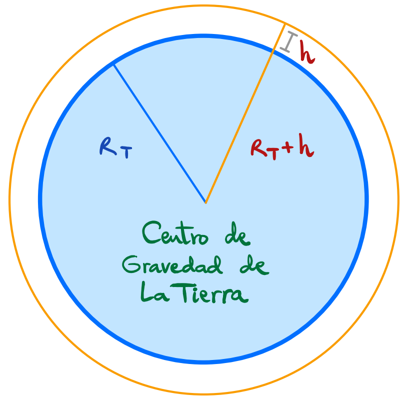
Levantamos un cuerpo desde R_T hasta $R_T + h$.

$$\Delta E_p = E_{p_2} - E_{p_1} = -G\,\frac{Mm}{R_T+h} + G\,\frac{Mm}{R_T} =$$

$$= GMm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T+h}\right) = GMm\,\frac{\cancel{R_T}+h-\cancel{R_T}}{R_T^2 + R_T h} \simeq GM\cdot m\cdot\frac{h}{R_T^2}$$

m.c.m $= R_T\cdot(R_T+h)$ $\qquad$ $R_T^2 \gg R_T h$

Sustituimos $g_0 = G\,\frac{M}{R_T^2} \Rightarrow \boxed{\Delta E_p = m\,g_0\,h}$ Aproximación para alturas pequeñas



Velocidad de escape hasta el infinito

Velocidad de escape desde La Tierra

Punto B: ∞, $V_\infty = 0$, $r_\infty = \infty$

Punto A: superficie

$$E_c + E_p = E_{c\infty} + E_{p\infty}$$ (no tenemos en cuenta la E_c)

$$\frac{1}{2} m v_e^2 - G\frac{M \cdot m}{r} = 0 - G\frac{M\cdot m}{\infty} = 0$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_e^2 = G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r} \Rightarrow v_e^2 = \frac{2\cdot G\cdot M}{r} \Rightarrow$$

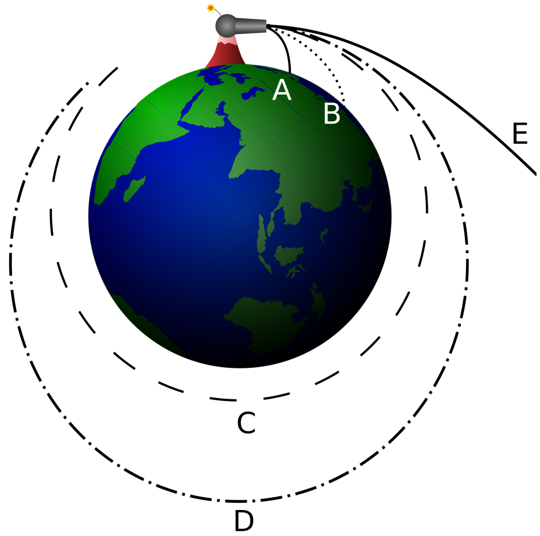
$$\boxed{v_e = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M}{r}}}$$ Velocidad de escape (fórmula general)

$$g_0 = G\cdot\frac{M}{R_T^2} \Rightarrow \boxed{G\cdot M = g_0\cdot R_T^2} \Rightarrow \boxed{v_e = \sqrt{\frac{2\cdot g_0\cdot R_T^2}{r}}}$$

Además, desde la Tierra, $r = R_T$

$$v_e = \sqrt{\frac{2\cdot g_0\cdot R_T^2}{R_T}} = \sqrt{2\cdot g_0\cdot R_T}$$ Velocidad de escape desde la Tierra

Para la Tierra: $v_e \simeq 11140\ m/s \simeq 11{,}1\ Km/s$



El cañón de Newton

Velocidad de escape desde una órbita

En general, desde una órbita a una distancia r, la velocidad de escape es la necesaria para superar la energía potencial gravitatoria (no consideramos la E_c):

$$\frac{1}{2} m v_e^2 - G\frac{M\cdot m}{r} = 0 - G\frac{M\cdot m}{\infty} = 0$$

$$\boxed{v_e = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M}{r}}}$$ Velocidad de escape desde una órbita $$\boxed{v_e = \sqrt{2}\cdot v_{orbital}}$$

EXTRA

Cálculo de la velocidad de escape con cálculo integral

Vamos a calcular el trabajo necesario para trasladar una partícula de masa 'm' desde una distancia r a la masa mayor M hasta el infinito. Sabemos que $W = \Delta E_c = -\Delta E_p$

$$W = \int_r^\infty \underbrace{\vec{F}\cdot d\vec{r}}_{\cos 180^\circ = -1} = \int_r^\infty -G\frac{M\cdot m}{r^2}\cdot dr = -GMm\cdot\left[-\frac{1}{r}\right]_r^\infty = -GMm\cdot\left(\frac{1}{\infty}+\frac{1}{r}\right) = \Delta E_c$$

$$\Delta E_c = 0(\text{final}) - E_{necesaria} \Rightarrow -\frac{GM\cancel{m}}{r} = -\frac{1}{2}\cancel{m}v_e^2 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$ Q.E.D.

Lo escribimos en formato de energía cinética

FIN EXTRA

✏️ Actividades de Energía y Velocidad de escape

Ejercicio 14: Problema del radio de Schwartzchild. Calcula el tamaño al que hay que reducir un cuerpo, conocida su masa, para convertirlo en un agujero negro (objeto del que ni siquiera la luz puede escapar).

Para resolver el problema, debemos calcular para qué radio del objeto, la velocidad de escape es igual a la velocidad de la luz. $\boxed{v_e = c}$ hipótesis

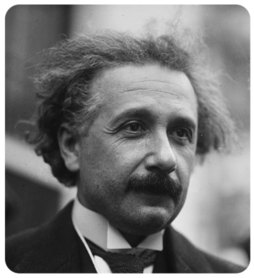
$$v_e = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M}{r}} \quad , \quad v_e = c = 3\cdot 10^8 \ m/s$$

$$c^2 = \frac{2GM}{r} \Longrightarrow \boxed{r = \frac{2GM}{c^2}}$$

Radio de Schwartzchild
Horizonte de sucesos o eventos de un agujero negro

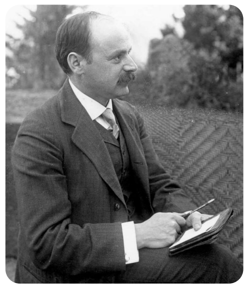
Para el Sol: $r = \dfrac{2\times 6.67\times 10^{-11}\times 2\times 10^{30}}{(3\times 10^8)^2} \approx 2964.44444 \ m \simeq 3 \ km$

Para el Tierra: $r = \dfrac{2\times 6.67\times 10^{-11}\times 6\times 10^{24}}{(3\times 10^8)^2} \approx 0.00889 \ m \simeq 9 \ mm$



Albert Einstein

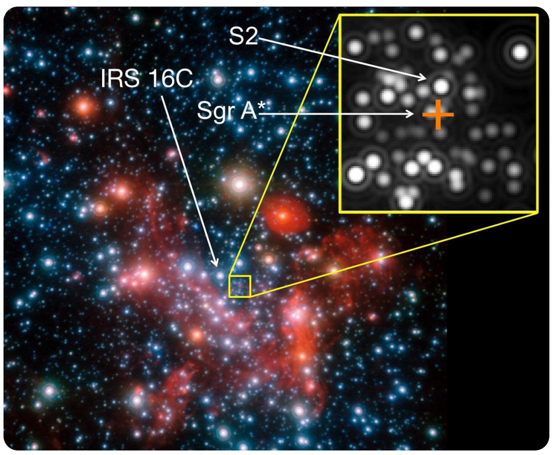
Albert Einstein, físico alemán, descubrió una teoría de la gravitación, la relatividad general que supera el modelo de Newton y predice los agujeros negros.



Karl Schwarzschild

El físico y matemático alemán Karl Schwartzchild encontró la primera solución exacta de la ecuación de campo gravitatorio de Einstein.

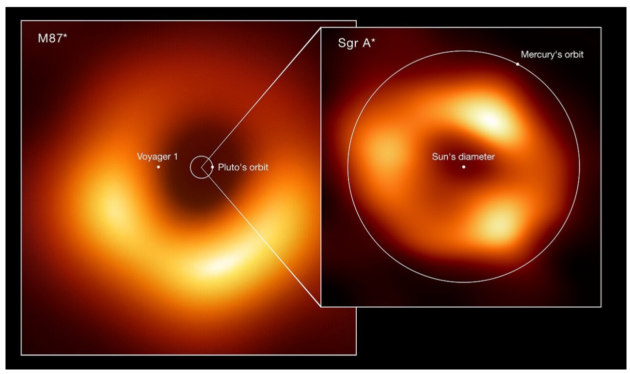
Propuesta.
Calcula el Radio de Schwartzchild de los agujeros negros de M87 y Sgt A* en nuestra vía láctea. Utiliza el dato de la masa del Sol.

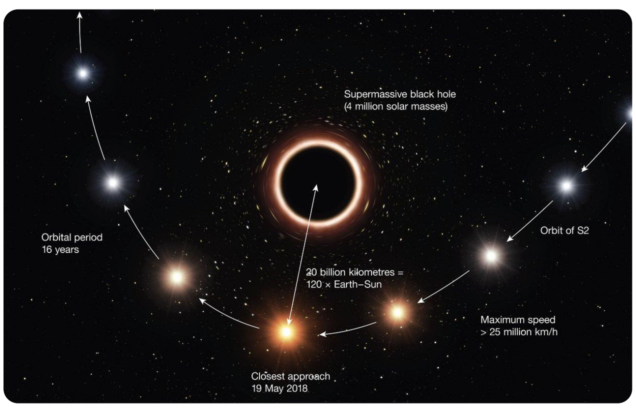


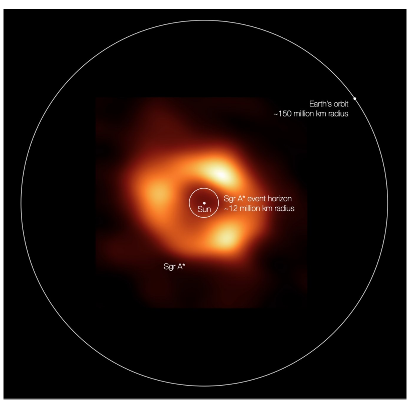
A la izquierda:
Imagen real de estrellas orbitando en torno al agujero negro Sagittarius A*.

Imagen inferior izquierda:
Agujero negro Sagittarius A* en el centro de nuestra Vía láctea.
Masa: 4,1 millones de masas solares.
Imagen CGI (no real)

Créditos: ESO Observatory.





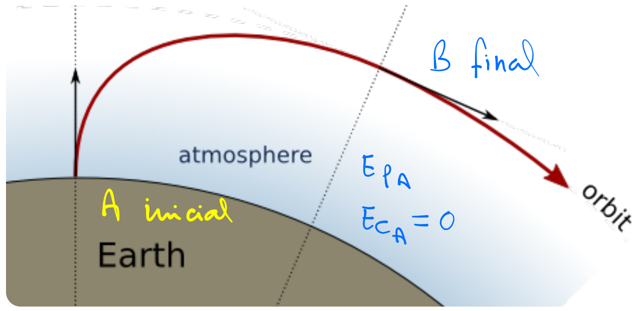


Sagitario A* EHT (Event Horizon Telescope) (año 2022) 4 millones de masas solares

SIZE COMPARISON:
THE M87 BLACK HOLE
AND
OUR SOLAR SYSTEM

Primera imagen de un agujero negro en el núcleo de la galaxia M87 tomada por el EHT (Event Horizon Telescope), (año 2019)
Masa: 6 500 millones de masas solares

Lanzamiento de satélites: puesta en órbita



$$E_{m_A} + E_{necesaria} = E_{m_B}$$

$$\boxed{E_{necesaria} = E_{m_B} - E_{m_A}}$$ Energía de satelización [J]

$$-G\frac{Mm}{R_T} + 0 + E_{necesaria} = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}mv^2$$

$r = R_T + h$

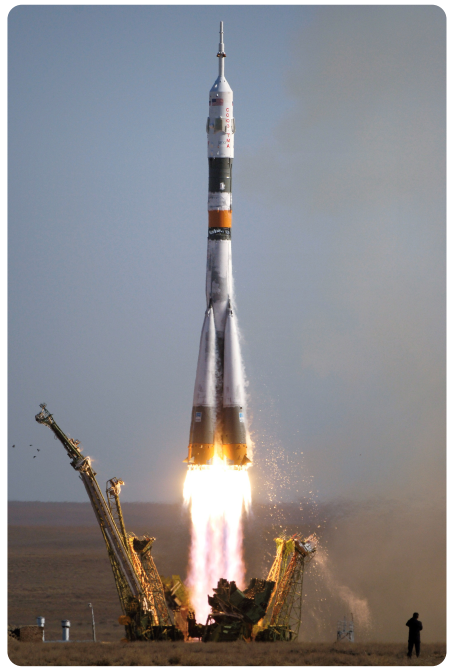
En B, está en órbita: $G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Longrightarrow G\frac{M}{r} = v^2$

$$E_{necesaria} = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 + G\frac{Mm}{R_T}$$

$$E_{necesaria} = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}m\,G\frac{M}{r} + G\frac{Mm}{R_T}$$

$$E_{necesaria} = GMm\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{R_T}\right) = GMm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right), \quad r = R_T + h$$

$$\boxed{E_{necesaria} = GMm\cdot\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2\cdot r}\right)}$$ Energía de satelización [J]

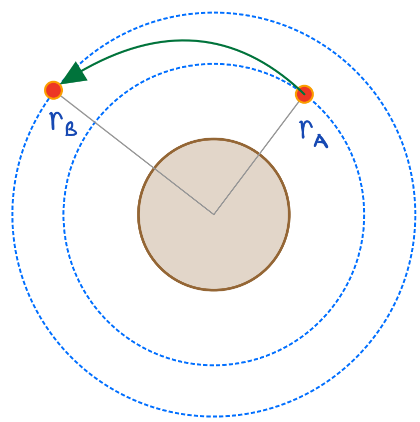


Cohete Soyuz - Союз

Transferencia orbital

$$E_{m_A} + E_{necesaria} = E_{m_B}$$

$$\boxed{E_{necesaria} = E_{m_B} - E_{m_A}}$$ Energía de transferencia orbital



$$E_{necesaria} = \left(\frac{1}{2}mv_B^2 - G\frac{Mm}{r_B}\right) - \left(\frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{Mm}{r_A}\right)$$

$$F_{c_B} = F_{g_B} \Rightarrow G\frac{M}{r_B} = v_B^2, \quad F_{c_A} = F_{g_A} \Rightarrow G\frac{M}{r_A} = v_A^2$$

$$E_{necesaria} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r_B} - G\frac{Mm}{r_B}\right)}_{} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r_A} - G\frac{Mm}{r_A}\right)}_{}$$

$$E_{necesaria} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r_B} + \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r_A}$$ ← Diferencia entre las energías de enlace orbital

$$\boxed{E_{necesaria} = \frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)}$$ Energía de transferencia orbital [J]

✏️ Actividades de Energía y Velocidad de escape

Ejercicio 15: Deduce la expresión de la energía cinética de un satélite en órbita circular en función de las masas y el radio. Demuestra que la energía mecánica es igual a la mitad de su energía potencial.

Si un cuerpo está atrapado gravitatoriamente, se cumple la condición de órbita:

$$F_g = F_c \Rightarrow G\frac{M\cdot m}{r^{\cancel{2}}} = m\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow m\,v^2 = G\frac{M\cdot m}{r}$$

Sustituyendo en la expresión de la energía mecánica: $E_m = E_c + E_p$

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M\cdot m}{r} = \frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r} - G\frac{M\cdot m}{r} = -G\frac{M\cdot m}{2r} \Rightarrow \boxed{E_m = -G\frac{M\cdot m}{2r}}$$

Energía de enlace orbital $E_m < 0$

Como se puede apreciar: $\boxed{E_m = \frac{1}{2}E_p}$ $\boxed{E_c = -\frac{1}{2}E_p}$

Ejercicio 16: Dada la relación entre las masas y los radios de la Tierra y Marte, calcula la velocidad de escape de Marte. Datos: $g_0 = 9{,}81\ m/s^2$, $R_T = 6370\ km$, $M_m = M_T/9$, $R_m = 0{,}5\cdot R_T$

Deducimos la expresión de la velocidad de escape de Marte:

$$\frac{1}{2}m\,v_e^2 - G\frac{M\cdot m}{r} = 0 - G\frac{M\cdot m}{\infty} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}\,v_e^2 = G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r} \Rightarrow v_e^2 = \frac{2\cdot G\cdot M}{r} \Rightarrow$$

$$V_e = \sqrt{\frac{2GM_m}{R_m}} = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot\frac{M_T}{9}}{0{,}5\cdot R_T}}$$, No conocemos ni G, ni M_T

$g_0 = 9{,}8\frac{m}{s^2} = G\frac{M_T}{R_T^2}$ Definición del campo gravitatorio de la Tierra

$GM_T = g_0R_T^2$, Sustituimos GM_T en la expresión de la velocidad de escape:

$$V_e = \sqrt{\frac{2g_0\frac{R_T^{\cancel{2}}}{9}}{0{,}5\,\cancel{R_T}}} = \sqrt{\frac{2g_0R_T}{0{,}5\cdot 9}} = \sqrt{\frac{2\times 9.8\times 6370\times 10^3}{0.5\times 9}} \approx 5267.34173\ \frac{m}{s} \simeq 5300\ \frac{m}{s}$$

Ejercicio 17: ¿Cuál sería la altura máxima alcanzada por un proyectil lanzado verticalmente hacia arriba, desde la superficie de Marte, a $7{,}2\cdot 10^3\ km/h$? Puedes utilizar los datos del problema anterior.

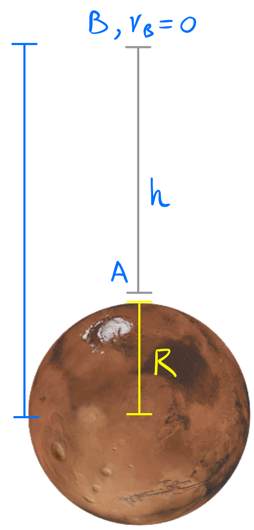
Resolvemos el problema por la conservación de la energía mecánica.

$Em_A = Em_B$; En la altura máxima (h en el punto B), la velocidad $v_B = 0$. $V_A = 7{,}2\cdot 10^3\frac{km}{h} = 2\cdot 10^3\frac{m}{s}$

Calculamos g_0 en Marte. $g_0 = G\frac{M}{R^2} = G\frac{M_T/9}{(R_T/2)^2} = \frac{4}{9}\cdot 9{,}8 \simeq 4{,}36\ m/s^2$

El radio de Marte $R = \frac{R_T}{2} = 3185\ km$, luego $G\,M = g_0R^2$ (datos de Marte)

$$\frac{1}{2}\cancel{m}\,v_A^2 - G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r_A} = \underbrace{\frac{1}{2}\cancel{m}\,v_B^2}_{0} - G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r_B}$$ siendo $v_B = 0$, $r_A = R$, $r_B = R + h$



$$\frac{1}{2}v_A^2 - G\frac{M}{r_A} = -G\frac{M}{r_B} \Rightarrow r_B = \frac{-G\cdot M}{\frac{1}{2}v_A^2 - G\frac{M}{r_A}} = \frac{G\cdot M}{G\frac{M}{r_A} - \frac{1}{2}v_A^2}$$

$$r_B = \frac{g_0R^2}{\frac{g_0R^{\cancel{2}}}{\cancel{R}} - \frac{1}{2}v_A^2} = \frac{g_0R^2}{g_0R - \frac{1}{2}v_A^2} = \frac{4{,}36\cdot(3{,}185\cdot 10^6)^2}{4{,}36\cdot 3{,}185\cdot 10^6 - \frac{1}{2}\cdot(2\cdot 10^3)^2} \approx 3720897.565326\ m$$

$$h = r_B - R = 3{,}72\cdot 10^6 - 3{,}185\cdot 10^6\ m \simeq 5{,}35\cdot 10^5\ m$$

Ejercicio 18: El satélite Giove-B (parte del sistema de navegación europeo Galileo) tiene una masa de $5{,}0 \cdot 10^2\ kg$ y su órbita se encuentra a una distancia de $2{,}32 \cdot 10^7\ m$ de la superficie terrestre. Determina:

a) Las energías potencial, cinética y mecánica del satélite.

b) La energía mínima necesaria para ponerlo en dicha órbita.

c) La velocidad de escape de esta órbita.

Datos: $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}\ kg$, $R_T = 6370\ km$, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$

ESA Giove-B Galileo

a) $E_p = -G\dfrac{Mm}{r}$, $r = R_T + h = 6370 \cdot 10^3 + 2{,}32 \cdot 10^7 = 2{,}96 \cdot 10^7\ m$

$$E_p = -\frac{6.67\times10^{-11}\times5.97\times10^{24}\times5\times10^{2}}{6370\times10^{3}+2.32\times10^{7}} \approx -6733158606.69598\ J \simeq -6{,}73 \cdot 10^9\ J$$

$E_c = \frac{1}{2}mv^2$; No conozco la velocidad. Por la condición de órbita:

$$F_g = F_c \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v^2 = G\frac{M}{r}\text{ , luego:}$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\,G\frac{M}{r} = \frac{GMm}{2r} = \frac{6.67\times10^{-11}\times5.97\times10^{24}\times5\times10^{2}}{2\times(6370\times10^{3}+2.32\times10^{7})} \approx 3366579303.34799\ J \simeq 3{,}37 \cdot 10^9\ J$$

Energía mecánica: $E_m = E_c + E_p = 3{,}37 \cdot 10^9\ J - 6{,}73 \cdot 10^9\ J \simeq -3{,}37 \cdot 10^9\ J$

En una órbita circular $E_m = \dfrac{E_p}{2} = -E_c$

b) $E_{m_A} + E_{necesaria} = E_{m_B}$

$$\boxed{E_{necesaria} = E_{m_B} - E_{m_A}}$$

Energía de satelización

$$-G\frac{Mm}{R_T} + E_{necesaria} = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}mv^2$$

$r = R_T + h$

En B, está en órbita: $G\dfrac{M\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\dfrac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow G\dfrac{M}{r} = v^2$

$$E_{necesaria} = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 + G\frac{Mm}{R_T}$$

$$E_{necesaria} = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}m\,G\frac{M}{r} + G\frac{Mm}{R_T}$$

$$E_{necesaria} = GMm\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{R_T}\right) = GMm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right)$$

, $r = R_T + h = 2{,}96 \cdot 10^7\ m$

$$\boxed{E_{necesaria} = GMm \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2 \cdot r}\right)}$$

Energía de satelización

$$E_{necesaria} = 6.67\times10^{-11}\times5.97\times10^{24}\times5\times10^{2}\times\left(\frac{1}{6370\times10^{3}} - \frac{1}{2\times2.96\times10^{7}}\right) \approx 2.78926\times10^{10}\ J \simeq 2{,}79 \cdot 10^{10}\ J$$

c) Velocidad de escape (hasta el infinito) desde la órbita.

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}m v_e^2 - G\frac{M \cdot m}{r} &= 0 - G\frac{M \cdot m}{\infty} = 0 \\ \frac{1}{2}\cancel{m} v_e^2 &= G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r} \end{aligned}\right\}$$

Velocidad de escape

$$\boxed{v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{r}}} = \sqrt{\frac{2\times6.67\times10^{-11}\times5.97\times10^{24}}{6370\times10^{3}+2.32\times10^{7}}} \approx 5189.66612\ \frac{m}{s}$$

$v_e \simeq 5{,}19 \cdot 10^3\ m/s$

Principio de conservación de la cantidad de movimiento (momento lineal)

Sabemos que, en general, $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{0 \text{ si } m = cte}\vec{v} + m\cdot\vec{a} = m\cdot\vec{a} = \vec{F}$

Luego $\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$ La fuerza es la variación (derivada) del momento lineal o cantidad de movimiento.

Es fácil comprobar que si $\vec{F} = 0$ (no hay fuerzas externas o la suma es nula), entonces $\vec{p}$ = constante.

Efectivamente, $\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = cte}$ Principio de conservación de la cantidad de movimiento

Considerando como sistema TODO el Universo, no hay fuerzas externas, luego:
La cantidad total de movimiento en el Universo es constante.
Si un cuerpo no es interferido, continuará moviéndose a velocidad constante en línea recta (ley de inercia).

Producto vectorial

El producto vectorial mide la tendencia de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ a apuntar en direcciones perpendiculares.
El resultado es un vector (por eso se llama vectorial) perpendicular al plano formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

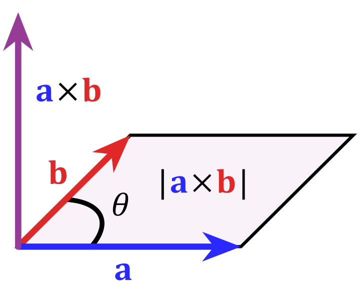
El módulo $\boxed{|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\cdot \text{sen}\,\theta}$

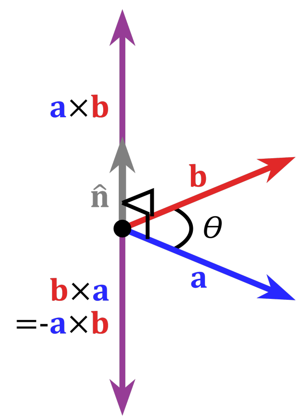
θ es el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

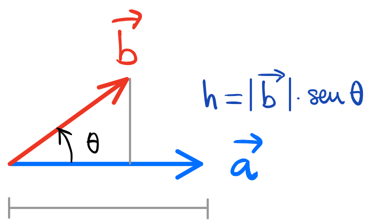
Si $\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}| = 0$

Si dos vectores son paralelos, su producto vectorial es nulo.

Este módulo representa también el área del paralelogramo formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$
El área es máxima cuando $\theta = 90°$



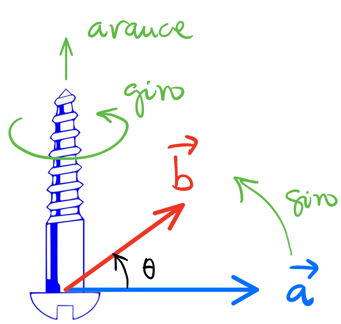


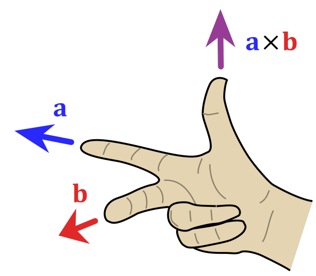


Área = base · altura
Área = $|\vec{a}||\vec{b}|\cdot \text{sen}\,\theta$

El producto vectorial no es conmutativo:
$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

El sentido del vector producto vectorial es el de avance de un tornillo que gire de $\vec{a}$ a $\vec{b}$ por el camino más corto. Puede también servir como regla pnemotécnica, la regla de la mano derecha.





Regla de la mano derecha

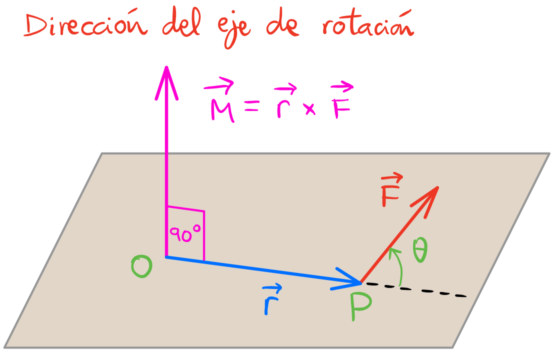
Momento de fuerza y Principio de conservación del Momento angular o cinético

Momento angular https://sites.google.com/site/smmfisicayquimica/fisica-bac2/campo-gravitatorio/momento-angular

Recordemos primero la ley de conservación del momento lineal. Como $\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}\ ,\ \text{si } \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{cte}}$

Cuando el movimiento es angular (rotación), aunque se aplique una fuerza externa, aún hay algo que puede ser 0; el momento de la fuerza.

El momento de una fuerza con respecto de un punto, es el producto vectorial del vector de posición $\vec{r}$ que va desde el punto considerado (O) al punto de aplicación de la fuerza (P) por el vector fuerza.



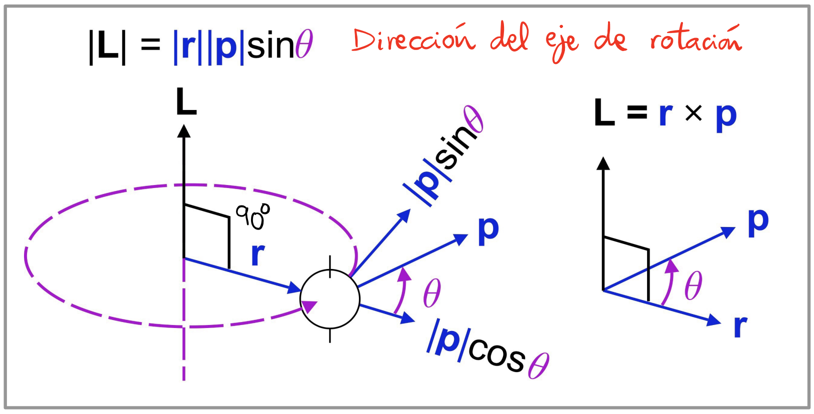
$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$ Momento de fuerza $\left[m \cdot kg \cdot \frac{m}{s^2} = kg \cdot \frac{m^2}{s^2} \right]$

El momento de fuerza puede ser nulo aunque $\vec{r}$ y $\vec{F} \neq 0$, cuando $\vec{r} \times \vec{F} = 0$, es decir, cuando $\vec{r}$ y $\vec{F}$ son paralelos, algo que ocurre en TODAS las fuerzas centrales, como la gravedad.

Para girar una puerta o una rueda de bici, basta con aplicar un momento de fuerza, pero en el movimiento planetario o en un huracán NO hay momento de fuerza.

Para comprender la dinámica de rotación necesitamos introducir el momento angular (equivale al concepto de momento lineal en el movimiento de traslación en línea recta). Es el momento del vector $\vec{p}$.

$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$ Momento angular $\left[m \cdot kg \cdot \frac{m}{s} = kg \cdot \frac{m^2}{s} \right]$



$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{p}| \cdot \text{sen}\,\theta$ Módulo

Calculemos cómo varía el momento angular con el tiempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} \times \underbrace{\vec{p}}_{m\vec{v}} + \vec{r} \times \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{\vec{F}} = \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{0} + \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}}$$

El momento de la fuerza es la variación del momento angular con respecto del tiempo.

$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}\ ,\ \text{si } \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{cte}}$ Principio de conservación del momento angular

$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \text{sen}\,\theta$ Módulo (θ = ángulo que forman)

$\vec{M} = 0$ no sólo cuando r o F son nulos sino también cuando $\text{sen}\,\theta = 0$, es decir, $\vec{r} \parallel \vec{F}$.

En el caso de la gravedad $\theta = 180°$, $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{cte}$; Se conserva. $\boxed{L = |\vec{r} \times \vec{p}| = \text{cte}}$

Si no hay momento de fuerza sobre un sistema, el momento angular permanece constante.
La cantidad total de momento angular en el Universo es constante. Un cuerpo que gira, continuará girando en la misma dirección a no ser que se aplique un momento de fuerza sobre él.

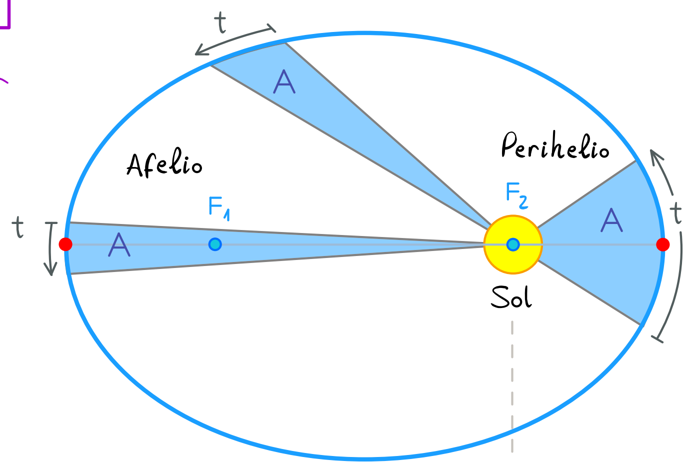
Ejemplos: Peonza, giroscopio, patinador, remolino, planetas, galaxias (cuando se reduce $\vec{r}$, aumenta $\vec{v}$).

Resumen : $\boxed{\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \xrightarrow[\text{constante}]{m\cdot} \vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} \xrightarrow[\text{vectorial}]{\vec{r}\times} \vec{r}\times\vec{F} = \vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte}$

$\boxed{\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}}$

Demostración de la 2ª ley de Kepler

Definimos la **velocidad areolar** como el área barrida por un cuerpo por unidad de tiempo. $\boxed{v_A = \dfrac{dA}{dt}}$ velocidad areolar



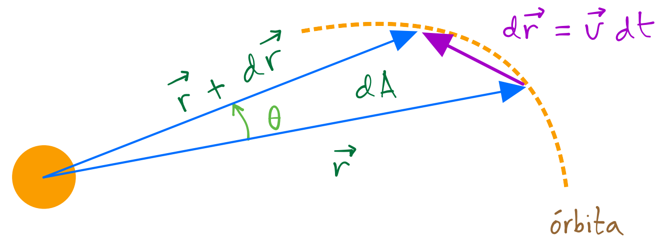
EXTRA

Consideramos un desplazamiento infinitesimal dr del cuerpo que está orbitando.

El sector trazado es como un triángulo rectángulo para valores muy pequeños del desplazamiento : $\Delta r \rightarrow 0 \Rightarrow dr$

$$dA = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{1}{2}|\vec{r}\times d\vec{r}|$$

$$v_A = \frac{dA}{dt} = \frac{\frac{1}{2}|\vec{r}\times d\vec{r}|}{dt} = \frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}| \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$$



Como $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\vec{v} \Rightarrow$

$$|\vec{L}| = |\vec{r}\times m\vec{v}| = m\cdot|\vec{r}\times\vec{v}|$$

Sustituyendo : $V_A = \dfrac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}| = \dfrac{1}{2}\dfrac{|\vec{L}|}{m}$

FIN EXTRA

(No es imprescindible saber hacer esta demostración)

Por el principio de conservación del momento angular: $\boxed{\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{M}}$

La fuerza gravitatoria es central, es decir, $\vec{r} \parallel \vec{F} \Rightarrow \vec{r}\times\vec{F} = 0$. Luego $\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte$

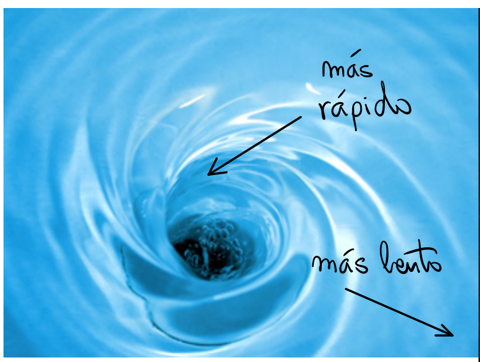
, entonces $\boxed{V_A = \dfrac{1}{2}\dfrac{|\vec{L}|}{m}}$, Como $m = cte$ y $L = cte \Rightarrow \boxed{V_A = cte}$ Velocidad areolar constante

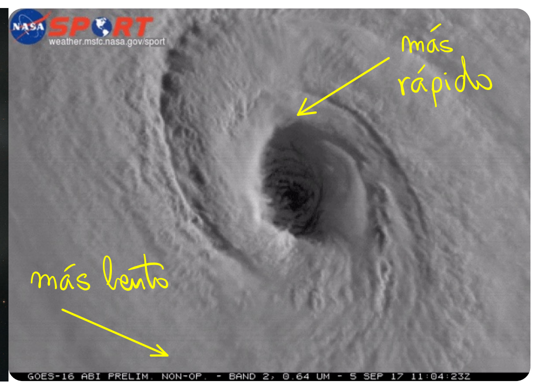
La 2ª ley de Kepler es una consecuencia del principio de conservación del momento angular.

No sólo nos permite comprender el movimiento planetario en Astronomía sino que explica la dinámica de los remolinos, por ejemplo, el movimiento de partículas en el desagüe de una bañera.

Del mismo modo, explica los vórtices en un incendio o en un huracán, así como los tornados.

Las formas dinámicas de los remolinos son patrones que la gravedad reproduce a escala cósmica (galaxias).





✏️ Actividades sobre el momento angular

Ejercicio 19: Cuestión: Las órbitas planetarias son planas porque:

a) Los planetas tienen inercia.

b) No varía el momento angular al ser una fuerza central.

c) No varía el momento de inercia de los planetas en su recorrido.

En un sistema planetario, considerado como conjunto, no hay fuerzas externas, sólo internas.
Por tanto, el momento de la fuerza es nulo.

Sabemos que $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_F = 0$; luego $\vec{L} = cte$

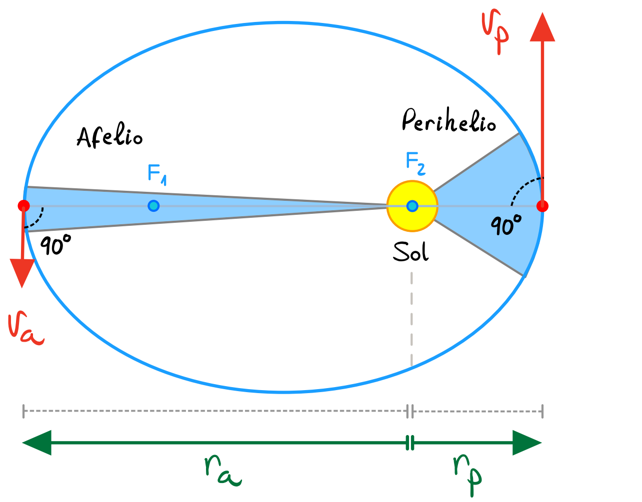
Como el momento angular es perpendicular a la trayectoria y dirección y sentido, la órbita se mantiene siempre en

Podríamos también argumentarlo con las características

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_F = \vec{r} \times \vec{F} \quad , \quad \vec{r} \parallel \vec{F} \Rightarrow \theta = 180^\circ \Rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte \Rightarrow \boxed{|\vec{r} \times \vec{p}| = cte}$$

Ejercicio 20: Cuestión: Aplica la conservación del momento angular al perihelio y el afelio de un planeta en torno al Sol para ver la relación entre distancia y velocidad.



$\boxed{|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = cte}$ en los sistemas con fuerzas centrales.

En el caso del afelio y del perihelio, el planeta forma un ángulo de 90° con el radiovector que lo une al Sol.

$$\vec{L}_{afelio} = \vec{L}_{perihelio}$$

$$\vec{r}_a \times \vec{p}_a = \vec{r}_p \times \vec{p}_p$$

$$r_a \cdot \cancel{m}\, v_a \cdot \cancel{\text{sen}}\, 90^\circ = r_p \cdot \cancel{m}\, v_p \cdot \cancel{\text{sen}}\, 90^\circ$$

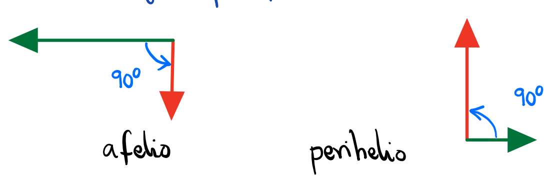
$$\boxed{r_a \cdot v_a = r_p \cdot v_p} \qquad \boxed{r_{afelio} \cdot v_{afelio} = r_{perihelio} \cdot v_{perihelio}}$$

Cuando el planeta está cerca del Sol, se mueve más rápido y cuando está lejos se mueve más despacio.
Es una consecuencia de la conservación del momento angular.

Nota sobre los ángulos

Nótese que el ángulo se toma por el camino más corto al ir de $\vec{r}$ a $\vec{p}$ (o $\vec{v}$) porque es el orden en que aparece en $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

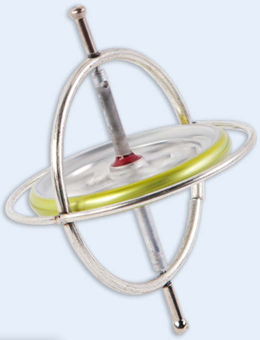
Prolongamos los vectores $\vec{r}$ (verde) para ver el ángulo que forman con $\vec{v}$.



Los ángulos son positivos porque se recorren en sentido horario.

Spinner

Este sencillo juguete se puede convertir en un giroscopio y así demostrar la conservación del momento angular y la precesión bajo un momento de fuerza externo.



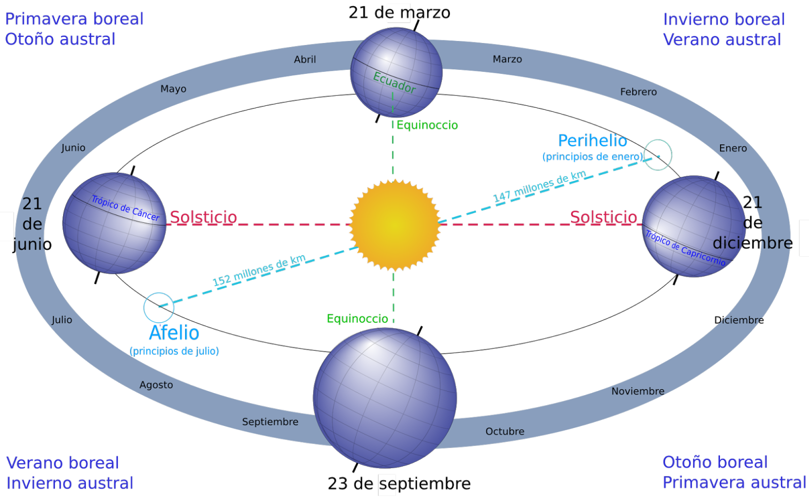
Johann von Bohnenberger

(1765 – 1831) Astrónomo alemán y descubridor del efecto giroscópico.

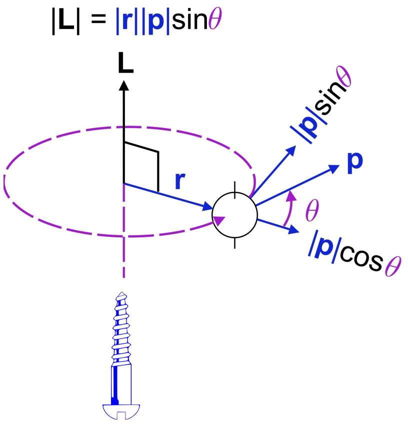
El giroscopio

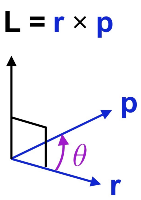
Está formado por un cuerpo que gira en torno a un **eje de rotación** (eje de simetría). A altas velocidades de giro se mantiene **estable**, sin cambiar la dirección del eje de rotación, a no ser que haya fuerzas externas como la gravedad; en ese caso se produce un movimiento de rotación del eje llamado **precesión** que trataremos más adelante.

Los **spinners**, las **peonzas** y las **ruedas** de las bicicletas son ejemplos de movimientos giroscópicos. La propia Tierra es un giroscopio perfecto porque viaja a través del espacio sin rozamiento; a lo largo de su órbita mantiene la orientación de su eje de rotación con respecto al Sol y, como consecuencia, se producen las **estaciones**.



Este fenómeno se debe a la **conservación del momento angular** del cuerpo que gira (**rotor**). En ausencia de fuerzas externas se **conserva la magnitud** y también la **dirección** del momento momento angular.



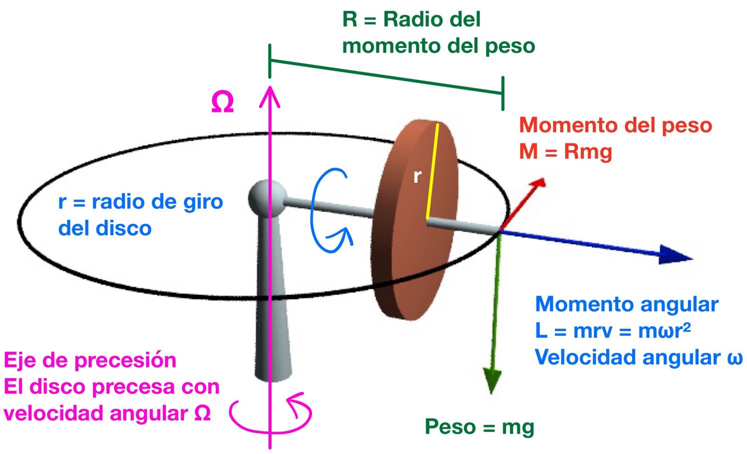


El **momento angular** $\vec{L}$ de una partícula de **masa m** y **velocidad** $\vec{v}$ ($\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$) respecto a un punto es el **producto vectorial** del vector de posición por el momento lineal de la partícula.

El vector momento angular: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times \cdot m\vec{v}$

El módulo: $\left|\vec{L}\right| = m\,r\,v\,\sin\theta = m\,\omega\,r^2\sin\theta$

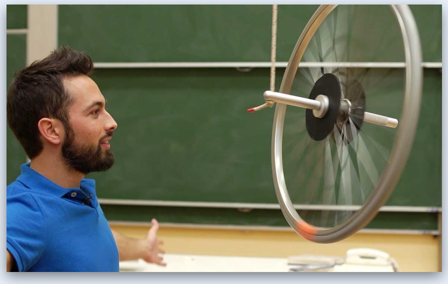
La dirección de $\vec{L}$ es perpendicular al plano formado por $\vec{r}$ y $\vec{p}$. El sentido se define por la **regla del tornillo** o de la **mano derecha**.



Precesión

Cuando el disco de un giroscopio se somete a un momento de fuerza (por ejemplo el peso) entonces tiende a cambiar la orientación de su eje de rotación. Veamos un caso sencillo. El peso aplica un momento de fuerza hacia abajo que se transfiere al disco. La fuerza (peso) tiende a hacer caer el sistema con un radio R. Nótese que $\vec{R} \perp \vec{g}$ (están a 90º ; seno 90º = 1).

$$M = \left|\vec{M}_{peso}\right| = \left|\vec{R} \times m\vec{g}\right| = Rmg$$



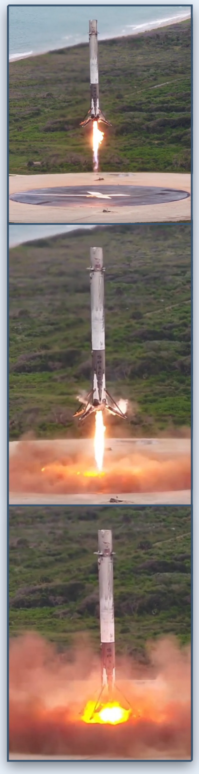
El disco, al rotar, hace que la fuerza se sienta a 90º en la dirección del giro ($\vec{M} \perp \vec{L}$).El momento angular $\vec{L}$ girará en círculos (varía el ángulo φ) con una velocidad angular uniforme de **precesión** Ω. El módulo de $\vec{L}$ es contante, pero no así su dirección $\vec{u}_L$:

Como $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \dfrac{dL}{dt}\vec{u}_L + L\dfrac{d\vec{u}_L}{dt} = L\dfrac{d\vec{u}_L}{dt}$ siendo $\Omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$

En general $\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$, en nuestro caso de 90º: $\Omega = \dfrac{M}{L} = \dfrac{Rmg}{mrv} = \dfrac{Rg}{\omega r^2}$

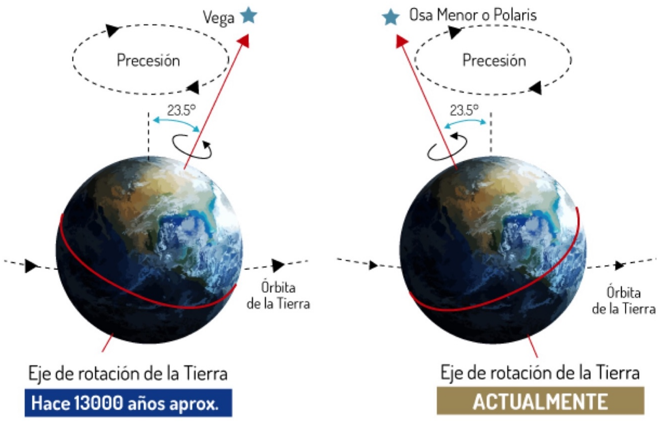
Aplicaciones tecnológicas

Navegación: El giroscopio es un dispositivo mecánico que sirve para medir, mantener o cambiar la orientación en el espacio de algún aparato o vehículo. Se utiliza en aviación y astronáutica para mantener el rumbo de vuelo, no sólo en el despegue sino en el aterrizaje, tal como hacen los cohetes reutilizables de la empresa estadounidense Space X.

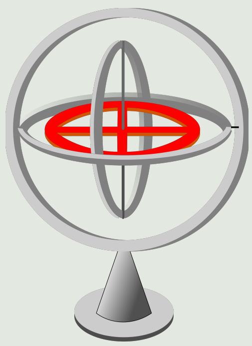


Precesión de la Tierra y de los equinoccios

Los **equinoccios** son los puntos en los que el sol atraviesa el plano de giro de la Tierra sobre sí misma. Los equinoccios se desplazan en una dirección perpendicular debido a la precesión de la propia Tierra. La **precesión de los equinoccios** se debe a que el eje de la Tierra gira en círculos. La Tierra no es perfectamente esférica y por eso el Sol ejerce un pequeño momento de fuerza. Una vuelta completa dura 26.000 años (año platónico). Eso significa que el eje norte no siempre ha apuntado a la estrella polar como testimonian los datos astronómicos del antiguo Egipto, cuando apuntaba a la estrella Vega.



Giroscopio de cardanes: Si se equilibra un giroscopio en su propio centro de masa, la fuerza de la gravedad no le hará tener precesión. Aunque giren sus soportes (anillos ligeros llamados **cardanes**), el eje de giro del giroscopio permanece fijo. Gracias a este mecanismo se mantiene el rumbo de navegación en submarinos, aeronaves y cohetes espaciales. Cerca de los polos terrestres no hay campo magnético, las brújulas no sirven y por eso se usan los giroscopios.



Principio de superposición: Masas puntuales

Si tenemos varias partículas de masas m_1, m_2, etc ejerciendo sus fuerzas gravitatorias sobre una masa m, la fuerza total es la suma vectorial de la fuerza causada por cada masa por separado, como si estuviera sola.

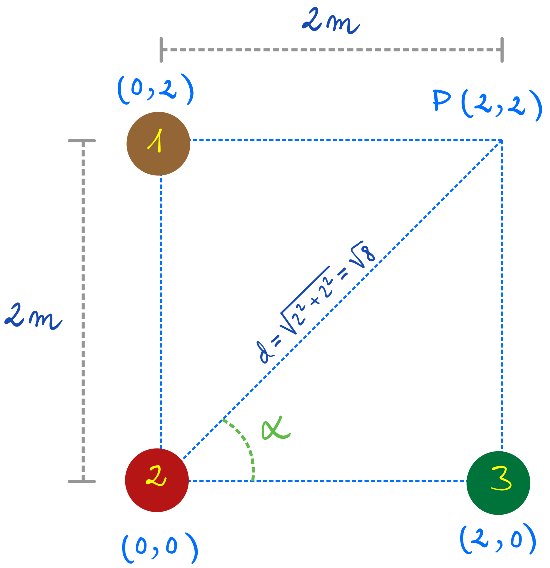
Lo mismo ocurre con el campo gravitatorio.

$$\boxed{\vec{F}_T = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = m\,\vec{g}_1 + m\,\vec{g}_2 + \dots = m\,\vec{g}_T}$$

$$\boxed{\vec{F}_T = -G\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{m\cdot m_i}{r_i^2}\cdot\vec{u}_{ri}} \qquad \boxed{\vec{g}_T = -G\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i^2}\cdot\vec{u}_{ri}}$$

✏️ Actividades de masas puntuales

Ejercicio 21: Tenemos 3 masas de $10\ kg$ dispuestas en los 3 de los 4 vértices de un cuadrado de $2\ m$ de lado. Calcula el campo gravitatorio en el 4º vértice. ¿Qué fuerza se ejercería sobre una masa de $5\ kg$ situada en ese punto? Dato: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ N\cdot m^2/kg^2$



Campo gravitatorio (forma vectorial)

$$\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\cdot\frac{M}{r^2}\cdot\vec{u}_r} \quad \left[\frac{N}{kg} = \frac{m}{s^2}\right]$$

Fuerza

$$\boxed{\vec{F} = m\cdot\vec{g}}$$

MÉTODO 1: VECTORIAL

Los vectores unitarios se calculan: $\boxed{\dfrac{\text{Extremo} - \text{Origen}}{\text{Módulo}}}$

P — masa — distancia

$\vec{u}_1 = (1,0) = \vec{i}$

$\vec{u}_2 = \dfrac{(2,2)-(0,0)}{\sqrt{8}} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{8}}, \dfrac{2}{\sqrt{8}}\right) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

$\vec{u}_3 = (0,1) = \vec{j}$

Recuerda: Vector y módulo

$$\boxed{\begin{array}{c}\vec{g} = g_x\vec{i} + g_y\vec{j} \\ |\vec{g}| = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}\end{array}}$$

$$\boxed{|\vec{F}_T| = m\cdot|\vec{g}_T|}$$

$\vec{g}_1 = -G\dfrac{10}{2^2}\vec{i} = -G\dfrac{10}{4}\vec{i} = -G\cdot\dfrac{5}{2}\vec{i}\ \ \dfrac{N}{kg}$

$\vec{g}_2 = -G\dfrac{10}{\sqrt{8}^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right) = -G\dfrac{5}{4\sqrt{2}}\vec{i} - G\dfrac{5}{4\sqrt{2}}\vec{j}\ \ \dfrac{N}{kg}$

$\vec{g}_3 = -G\dfrac{10}{2^2}\vec{j} = -G\cdot\dfrac{5}{2}\vec{j}\ \ \dfrac{N}{kg}$

$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 = -G\left(\dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{4\sqrt{2}}\right)\vec{i} - G\left(\dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{4\sqrt{2}}\right)\vec{j}\ \ \dfrac{N}{kg}$

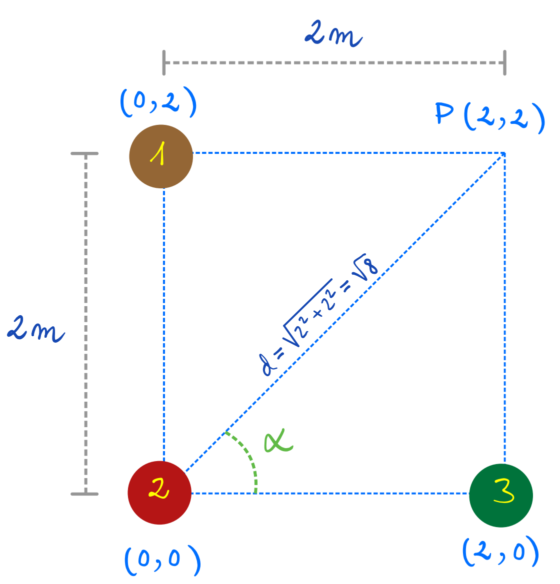
$\vec{g}_T = -2{,}26\cdot10^{-10}\,\vec{i} - 2{,}26\,10^{-10}\,\vec{j}\ \dfrac{N}{kg} \Rightarrow |\vec{g}_T| = g_T = \sqrt{2\times(2.26\times10^{-10})^2} \approx 3.19612\times10^{-10}\,\dfrac{N}{kg} \simeq 3{,}2\cdot10^{-10}\,\dfrac{N}{kg}$

$\vec{F}_T = 5\,kg\cdot\vec{g}_T\ N = -1{,}13\cdot10^{-9}\,\vec{i} - 1{,}13\cdot10^{-9}\,\vec{j}\ N \Rightarrow |\vec{F}_T| = \sqrt{2\times(-2.26\times10^{-10}\times5)^2} \approx 1.59806\times10^{-9}\,N$

TRIGONOMETRÍA (recordatorio) Puede encontrar más información en el tema de Física básica y matemáticas.

$\text{seno} \equiv \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\text{coseno} \equiv \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$	$\text{tangente} \equiv \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$	$\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1$ $tg\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$

MÉTODO 2: Por componentes (TRIGONOMETRÍA)



$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^0$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{8}} \Rightarrow \alpha = 45^0$$

$$g_{1x} = -G\frac{10}{2^2}$$

$$g_{1y} = 0$$

$$g_{2x} = -G\frac{10}{\sqrt{8}^2}\cdot\cos\alpha \quad \text{(horizontal)}$$

$$g_{2y} = -G\frac{10}{\sqrt{8}^2}\cdot\text{sen}\,\alpha \quad \text{(vertical)}$$

$$g_{3x} = 0$$

$$g_{3y} = -G\frac{10}{2^2}$$

$$g_{Tx} = g_{1x}+g_{2x}+g_{3x} = -G\left(\frac{10}{4}+\frac{10}{8}\frac{2}{\sqrt{8}}\right)\frac{N}{kg} = -2{,}26\cdot10^{-10}\ \frac{N}{kg}$$ El signo (−) indica ←

$$g_{Ty} = g_{1y}+g_{2y}+g_{3y} = -G\left(\frac{10}{4}+\frac{10}{8}\frac{2}{\sqrt{8}}\right)\frac{N}{kg} = -2{,}26\cdot10^{-10}\ \frac{N}{kg}$$ El signo (−) indica ↓

$$\vec{g} = g_x\vec{i} + g_y\vec{j} = -2{,}26\cdot10^{-10}\ \vec{i} - 2{,}26\cdot10^{-10}\ \vec{j}\ \frac{N}{kg}$$

$$|\vec{g}| = \sqrt{g_x^2+g_y^2} = \sqrt{2\times(2.26\times10^{-10})^2} \approx 3.19612\times10^{-10}\ \frac{N}{kg} \simeq 3{,}2\cdot10^{-10}\ \frac{N}{kg}$$

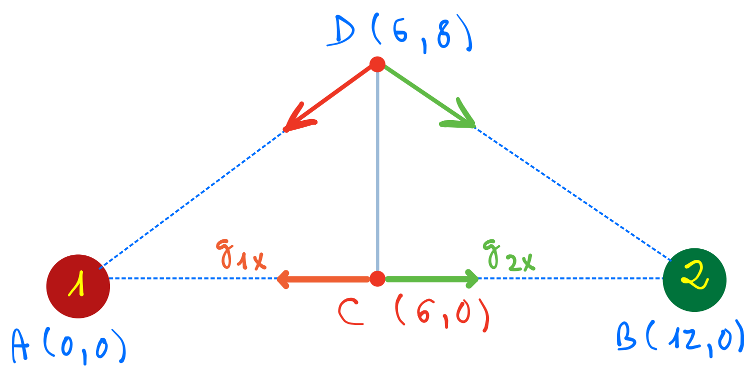
Ejercicio 22: Tenemos dos masas de $150\ kg$ situadas en $A(0,0)$ y $B(12,0)$. Calcula el campo en los puntos $(6,0)$ y $(6,8)$. Las unidades están en el SI.

Por simetría $\vec{g}_C = 0$
porque las masas son iguales y equidistantes del punto C.

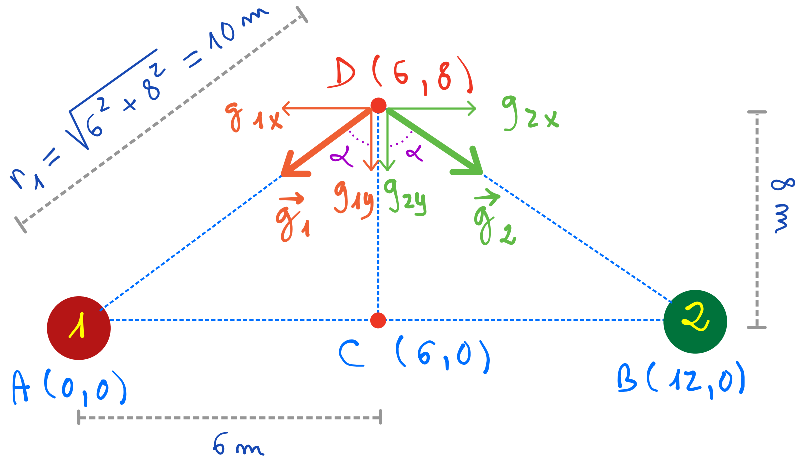
$g_{1x} = -g_{2x}$

$g_{1x} + g_{2x} = 0$

No hay componente vertical.



MÉTODO 2: Por componentes (TRIGONOMETRÍA)



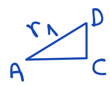
Por **simetría**, las componentes en el eje x se cancelan.

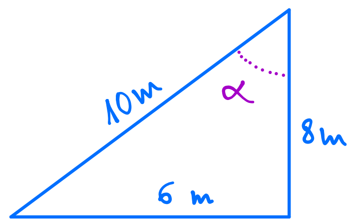
$$g_{1x} = -g_{2x}$$

$$g_{1x} + g_{2x} = 0 \Rightarrow g_{Tx} = 0$$

En cambio, en el eje y se suman las contribuciones de ambos campos:

$$g_{Ty} = g_{1y} + g_{2y}$$

La distancia AD es la hipotenusa del  $r_1 = \sqrt{6^2+8^2} = 10$ m



Calculo el ángulo α: $\cos\alpha = \frac{8}{10}$ o bien $\operatorname{sen}\alpha = \frac{6}{10}$

o bien $tg\,\alpha = \frac{6}{8} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{6}{8}\right) \approx 36.86990$ $\quad \alpha \simeq 36{,}87°$

$$g_{1y} = -G \cdot \frac{m_1}{r_1^2} \cdot \cos\alpha = -G \cdot \frac{150}{10^2} \cdot \cos 36{,}87° = -6.67\times10^{-11}\times\frac{150}{10^2}\times\cos 36{,}87 \approx -8.00399\times10^{-11}\ \frac{N}{kg}$$

El signo (−) indica ↓ Podemos resolverlo con el módulo positivo y poner el signo (−) al final, en el vector.

$$g_{2y} = -G \cdot \frac{m_2}{r_2^2} \cdot \cos\alpha$$ La situación es simétrica y el campo vale lo mismo.

$$g_{Ty} = g_{1y} + g_{2y} = 2 \cdot (-8 \cdot 10^{-11})\ \frac{N}{kg} = -16 \cdot 10^{-11}\ \frac{N}{kg} = -1{,}6 \cdot 10^{-10}\ \frac{N}{kg}$$

$$\vec{g}_T = -1{,}6 \cdot 10^{-10}\ \vec{j}\ \frac{N}{kg}$$

MÉTODO 1: VECTORIAL

$$\vec{r}_1 = \vec{AD} = D - A = (6,8) - (0,0) = (6,8) = 6\vec{i} + 8\vec{j}$$

$$\vec{u}_{r_1} = \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} = \frac{(6,8)}{\sqrt{6^2+8^2}} = \frac{(6,8)}{10} = \left(\frac{6}{10}, \frac{8}{10}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{BD} = D - B = (6,8) - (12,0) = (-6,8) = -6\vec{i} + 8\vec{j}$$

$$\vec{u}_{r_2} = \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|} = \frac{(-6,8)}{\sqrt{6^2+8^2}} = \frac{(-6,8)}{10} = \left(\frac{-6}{10}, \frac{8}{10}\right) = \left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$$

Campo gravitatorio (forma vectorial)

$$\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\cdot\frac{M}{r^2}\cdot\vec{u}_r} \quad \left[\frac{N}{kg} = \frac{m}{s^2}\right]$$

$$\vec{g}_1 = -G\frac{m_1}{r_1^2}\vec{u}_{r_1} = -G\frac{150}{10^2}\left(\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}\right)$$

$$\vec{g}_2 = -G\frac{m_2}{r_2^2}\vec{u}_{r_2} = -G\frac{150}{10^2}\left(-\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}\right)$$

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = -G\frac{150}{10^2}\cdot\left(\cancel{\frac{3}{5}}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j} - \cancel{\frac{3}{5}}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}\right) = -G\frac{150}{10^2}\cdot\frac{8}{5}\vec{j}$$

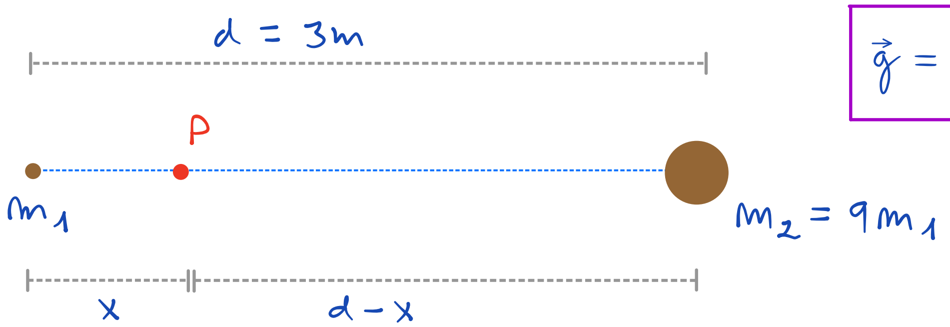
$$\vec{g}_T = -6.67\times10^{-11}\times\frac{150}{10^2}\times\frac{8}{5} = -1.6008\times10^{-10}\ \frac{N}{kg}\ \vec{j} \simeq -1{,}6\cdot10^{-10}\ \vec{j}\ \frac{N}{kg}$$

$$|\vec{g}_T| = 1{,}6\cdot10^{-10}\ \frac{N}{kg}$$

Ejercicio 23: Dos partículas de masas m_1 y $m_2 = 9\cdot m_1$ están separadas una distancia $d = 3\ m$. En el punto P, situado entre ellas, el campo gravitatorio total creado por estas partículas es nulo. Calcula la distancia x entre P y m_1. Dato: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ N\cdot m^2/kg^2$

Campo gravitatorio (forma vectorial)

$$\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\cdot\frac{M}{r^2}\cdot\vec{u}_r} \quad \left[\frac{N}{kg} = \frac{m}{s^2}\right]$$



$$-g_{1x} + g_{2x} = 0$$

$$\vec{g}_1 = -G\frac{m_1}{x^2}\vec{i}$$

$$\vec{g}_2 = -G\frac{m_2}{(d-x)^2}(-\vec{i}) = G\frac{m_2}{(d-x)^2}\vec{i}$$

$$\vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 0$$

$$-G\frac{m_1}{x^2}\vec{i} + G\frac{m_2}{(d-x)^2}\vec{i} = 0$$

$$\cancel{G}\frac{m_2}{(d-x)^2}\cancel{\vec{i}} = \cancel{G}\frac{m_1}{x^2}\cancel{\vec{i}}$$

$$\frac{m_2}{(d-x)^2} = \frac{m_1}{x^2} \qquad m_2 = 9m_1$$

$$\frac{9\cancel{m_1}}{(d-x)^2} = \frac{\cancel{m_1}}{x^2}$$

$$\frac{9}{(d-x)^2} = \frac{1}{x^2}$$

Tomo la raíz cuadrada en ambos términos.

$$\frac{3}{d-x} = \frac{1}{x} \Rightarrow 3x = 1\cdot(d-x)$$

$$3x = d - x$$

$$4x = d$$

$$x = \frac{d}{4} = \frac{3}{4}\ m$$

$$d = 3m$$

$$d - x = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}\ m$$

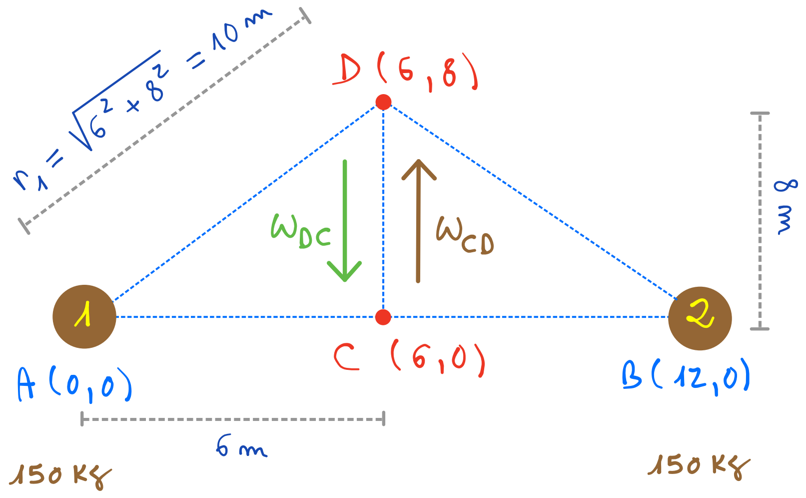
Ejercicio 24: Tenemos dos masas de $150\ kg$ situadas en $A(0,0)$ y $B(12,0)$. Calcula el trabajo necesario para trasladar una masa de $20\ kg$ de $D(6,8)$ a $C(6,0)$ y viceversa, de C a D.

$$\boxed{W = \Delta E_c = -\Delta E_p}$$

(en el caso de fuerzas conservativas)

$$W_{DC} = -\Delta E_p = -(E_{p_C} - E_{p_D})$$

$$W_{CD} = -\Delta E_p = -(E_{p_D} - E_{p_C})$$



Punto C: $r_{1C} = r_{2C} = 6\ m$

$$E_{p_{1C}} = -G\frac{Mm}{r_{1C}} = -G\cdot\frac{150\cdot 20}{6} = -6.67\times10^{-11}\times\frac{150\times20}{6} = -3.335\times10^{-8}\ J \simeq -3{,}3\cdot10^{-8}\ J$$

$E_{p_{2C}} = -3{,}3\cdot10^{-8}\ J$ (es igual por la simetría del problema)

$$E_{p_C} = E_{p_{1C}} + E_{p_{2C}} = -6{,}67\cdot10^{-8}\ J$$

Punto D: $r_{1D} = r_{2D} = 10\ m$

$$E_{p_{1D}} = -G\frac{Mm}{r_{1D}} = -G\cdot\frac{150\cdot 20}{10} = -6.67\times10^{-11}\times\frac{150\times20}{10} = -2.001\times10^{-8}\ J \simeq -2\cdot10^{-8}\ J$$

$E_{p_{2D}} = -2\cdot10^{-8}\ J$ (es igual por la simetría del problema)

$$E_{p_D} = E_{p_{1D}} + E_{p_{2D}} = -4\cdot10^{-8}\ J$$

$$W_{DC} = -(E_{p_C} - E_{p_D}) = -\left(-6{,}67\cdot10^{-8}\ J + 4\cdot10^{-8}\ J\right) = 2{,}67\cdot10^{-8}\ J$$

$W_g > 0$ El trabajo lo realiza el campo gravitatorio.

$$W_{CD} = -(E_{p_D} - E_{p_C}) = -\left(-4\cdot10^{-8}\ J + 6{,}67\cdot10^{-8}\ J\right) = -2{,}67\cdot10^{-8}\ J$$

$W_g < 0$ El trabajo lo realizamos en contra del campo gravitatorio.

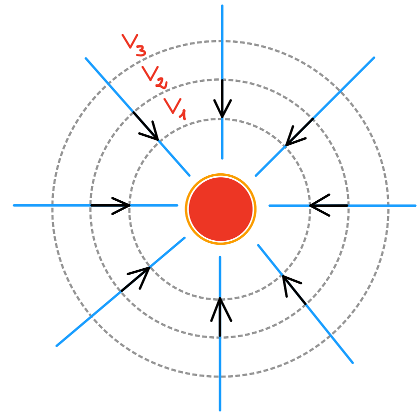
$\boxed{W_{DC} = -W_{DC} \Rightarrow W_{DC} + W_{DC} = 0 \quad \text{luego, el campo gravitatorio es conservativo.}}$

Potencial gravitatorio

El potencial gravitatorio en un punto es la Energía potencial por unidad de masa colocada en ese punto.

$$\boxed{V = \frac{E_p}{m} = -G\frac{M}{r}}$$ Potencial gravitatorio (escalar) $\left[\frac{J}{Kg}\right]$

El potencial es una magnitud escalar que sólo depende de la masa que crea el campo y de la distancia r del punto a la masa.



Superficies equipotenciales perpendiculares a las líneas de campo.

Una masa se moverá de manera espontánea en el sentido de los potenciales decrecientes.

$$V_1 < V_2 < V_3$$

Relación entre trabajo y potencial

El trabajo $W_{A\to B} = -\Delta E_{p\,AB} = -m\cdot\Delta V_{AB}$

$$\boxed{W_{A\to B} = -m\cdot(V_B - V_A)}$$

$$W_{\infty\to A} = -m(V_A - V_\infty) \underset{V_\infty = 0}{=} m\cdot\frac{GM}{r_A} = G\frac{Mm}{r_A} \Rightarrow \boxed{V_A = -\frac{W_{\infty\to A}}{m}}$$

El potencial en un punto equivale al trabajo realizado por unidad de masa (cambiado de signo) para trasladar la masa desde el infinito hasta dicho punto.

Superficie equipotencial: Lugar geométrico de todos los puntos del campo gravitatorio donde el potencial gravitatorio tiene el mismo valor.

El vector campo gravitatorio es perpendicular a las superficies equipotenciales en cada punto.

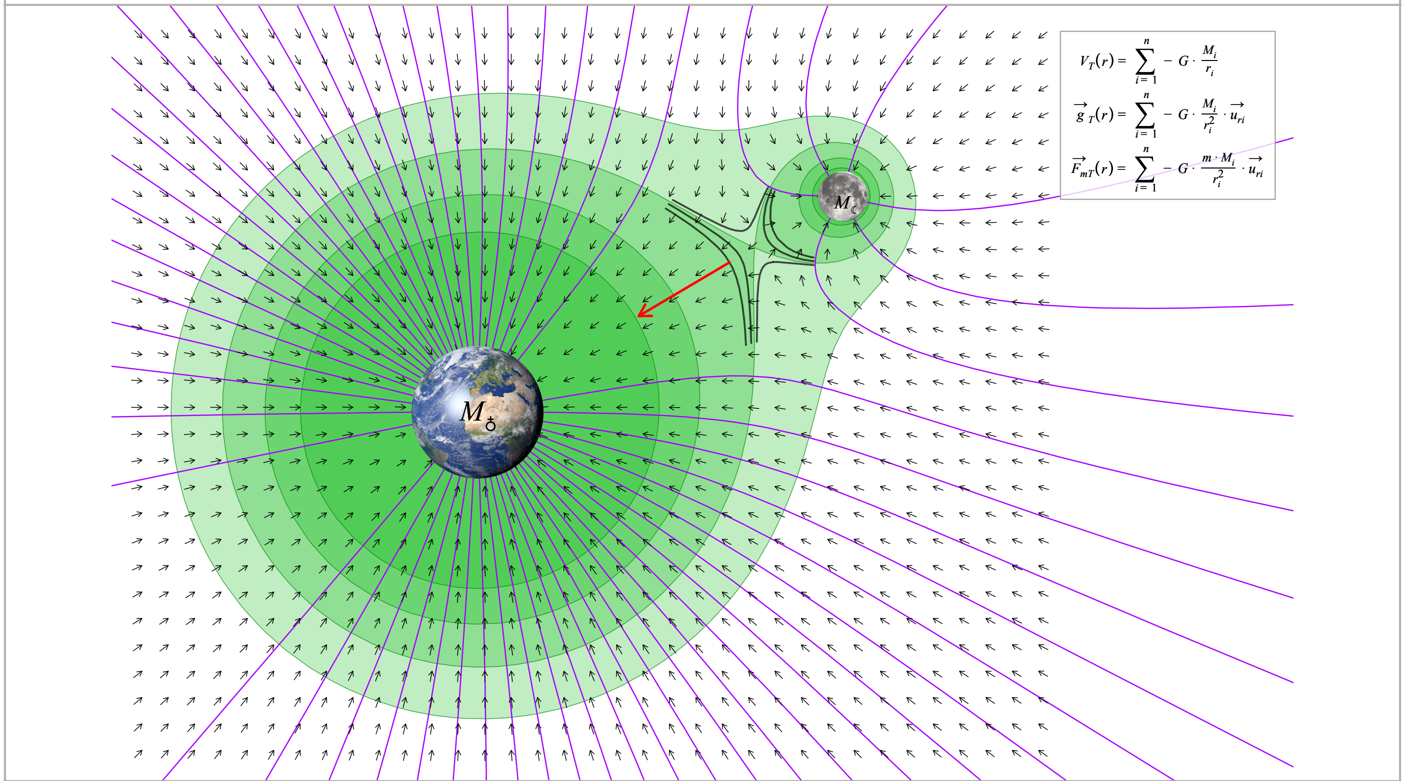
$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad \text{Si } V_A = V_B \text{ el } W_{AB} = 0 \Rightarrow \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{F}\perp d\vec{r}$$

desplazamiento

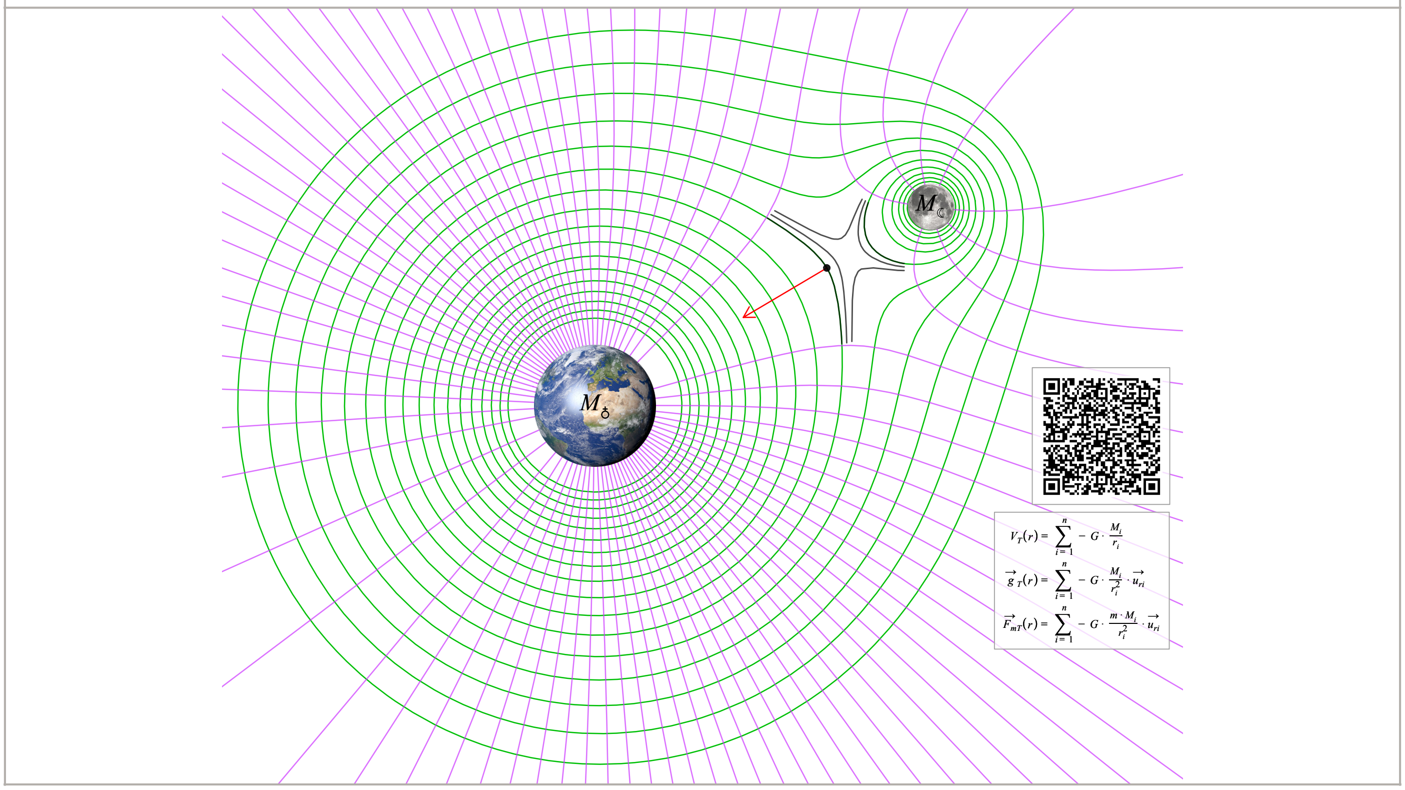
Es decir, la fuerza y el campo son perpendiculares a la superficie equipotencial.

Mapa vectorial del campo y líneas equipotenciales. Gráficos generados con Desmos

Sistema Tierra - Luna (no está a escala) Líneas de campo, mapa vectorial del campo y líneas equipotenciales



Sistema Tierra - Luna (no está a escala) Líneas de campo y líneas equipotenciales



Apéndices de Gravitación

Relación matemática entre fuerza y energía potencial

$$\boxed{W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta E_p} \qquad \boxed{\vec{F} = -\frac{dE_p}{dr} \cdot \vec{u}_r}$$

$$E_p = -G\frac{Mm}{r} \quad ; \quad \vec{F} = -\frac{dE_p}{dr} \cdot \vec{u}_r = \frac{d}{dr}\left(-G\frac{Mm}{r}\right) \cdot \vec{u}_r = -G\frac{Mm}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)' = -\frac{1}{r^2}$$

Relación matemática entre campo y potencial

$$\boxed{\vec{g} = -\vec{\nabla} V = -\frac{dV}{dr} \cdot \vec{u}_r}$$

$$\boxed{\Delta V = -\int \vec{g} \cdot d\vec{r}}$$

Operador gradiente $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k}$

Transforma el potencial escalar en el vector campo:

$$\vec{g} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \vec{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \vec{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \vec{k}\right) = -\frac{dV}{dr} \cdot \vec{u}_r$$

$$V = -G \cdot \frac{M}{r}$$

$$\vec{g} = -\frac{dV}{dr} \cdot \vec{u}_r = -\frac{d}{dr}\left(-G \cdot \frac{M}{r}\right) \cdot \vec{u}_r = -G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

Circulación del vector campo gravitatorio

Sea un campo vectorial $\vec{g}(\vec{r})$. Consideramos un desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$.

La circulación del campo vectorial $\vec{g}(\vec{r})$ a lo largo del trayecto $d\vec{r}$ es el producto escalar: $\boxed{\vec{g} \cdot d\vec{r}}$

La circulación del campo vectorial $g(\vec{r})$ a lo largo de una línea cualquiera que conecta los puntos A y B es la integral curvilínea: $\boxed{\int_C \vec{g} \cdot d\vec{r}}$ Circulación

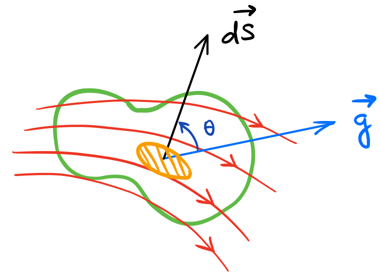
Si la trayectoria es cerrada (circunferencia, cuadrado, etc) se expresa: $\boxed{\oint \vec{g} \cdot d\vec{r}}$ Circulación en una trayectoria cerrada

Como $g = -G\frac{M}{r^2}$, $\oint \vec{g} \cdot d\vec{r} = \oint -G\frac{M}{r^2} dr = \left[G\frac{M}{r}\right]_{r_1}^{r_1}$ mismo punto

Al aplicar la regla de Barrow: Circulación = 0

La circulación en una trayectoria cerrada es nula para campos conservativos.

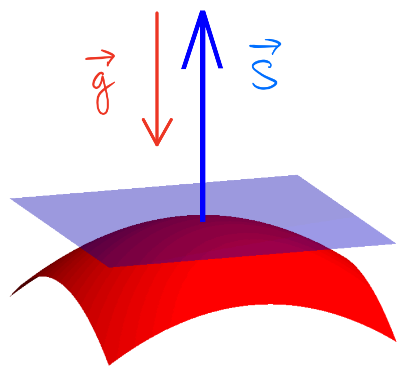
Flujo del vector campo gravitatorio



Se considera una superficie cualquiera atravesada por líneas del campo. Consideramos un elemento de superficie infinitesimal $\vec{dS}$ que se representa con un vector normal (perpendicular) a la superficie.

El flujo infinitesimal del vector $\vec{g}$ a través de la superficie $d\vec{S}$ es el producto escalar:

$$d\Phi = \vec{g} \cdot d\vec{S} = g \cdot dS \cdot \cos\theta$$



Vector de superficie (perpendicular al plano tangente)

Para calcular el flujo neto total, tengo que sumar todas las contribuciones infinitesimales, es decir, calcular la integral dentro de los límites de la superficie.

$$\boxed{\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = \int_S g \cdot dS \cdot \cos\theta}$$

El flujo representa la cantidad de líneas de fuerza que atraviesa una superficie.

Teorema de Gauss para el campo gravitatorio

Si rodeamos una masa con una esfera gaussiana (cerrada y esférica), el flujo es:

$$\Phi = \oiint g \cdot dS \cdot \cos\theta$$

El campo gravitatorio es una fuerza central.
$\vec{g}$ y $\vec{S}$ son antiparalelos luego $\theta = 180° \Rightarrow \cos\theta = -1$
En una esfera, la superficie $S = 4\pi r^2$

$$\Phi = -G\frac{M}{\cancel{r^2}} 4\pi \cancel{r^2} \cdot (-1) = 4\pi G M$$

, es decir, el flujo sólo depende de la masa (fuente del campo) encerrada en la superficie.

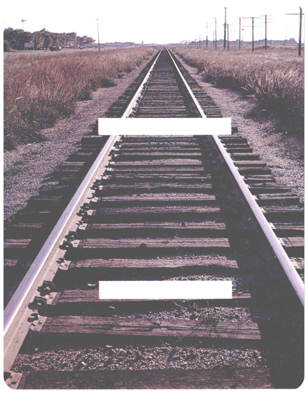
$$\boxed{\Phi = 4\pi G M}$$

Teorema de Gauss para campos centrales

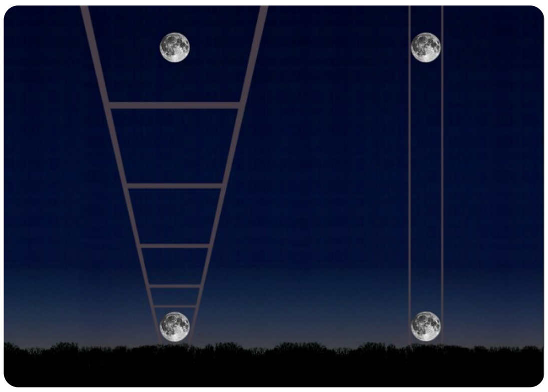
Actividad: Perigeo de la Luna y tamaño angular

Óscar Blanco (Agrupación Ío) 14-11-2016 A Coruña

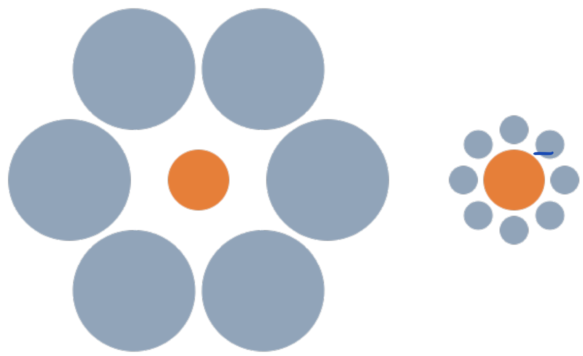
La Luna nos parece más grande en el horizonte, pero no es así. Nuestra percepción se debe a una combinación de ilusiones ópticas:



Ilusión de Ponzo

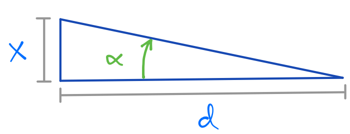


Ilusión lunar



Ilusión de Ebbinghaus

Tamaño angular



x = tamaño real
d = distancia

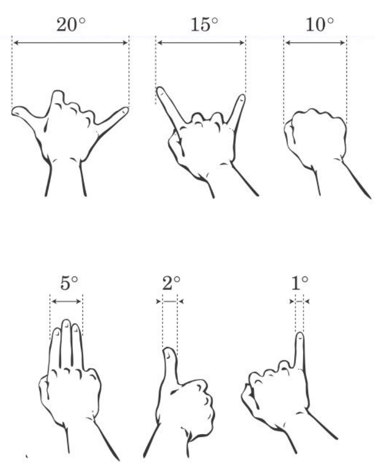
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{d} \Rightarrow \boxed{d = \frac{x}{\operatorname{tg}\alpha}}$$

Ejemplo: $\alpha = 0{,}5^\circ$

$$\operatorname{tg} 0{,}5^\circ = \frac{x}{d} \Rightarrow d = \frac{x}{\operatorname{tg} 0{,}5^\circ} \simeq 115 \cdot x \Rightarrow \underset{\alpha = 0{,}5^\circ}{d = 115 \cdot x}$$

$$\frac{1}{\tan 0.5} \approx 114.58865$$

distancia = 115 veces el tamaño real



Ejemplo: Piscina olímpica 50m
Desde un avión sobre $0{,}5^\circ$.

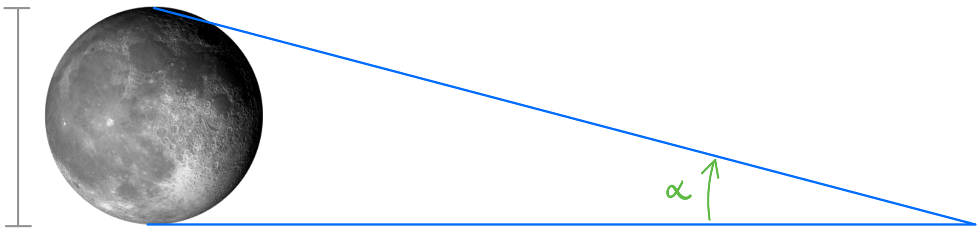
$d = 115 \cdot 50\,m = 5750\,m \simeq 6\,Km$

$r_L = 1737$ km
$D_L = x = 3474$ Km
Perigeo : 356000 Km
Apogeo : 406700 Km

Nota: recuerda que al principio del tema vimos cómo Eratóstenes dedujo el radio de la Luna $r_L \simeq 1731$ km siendo $x = 3462$ km el diámetro. Dedujo la distancia a partir de un tamaño angular de 0,5°:

$$d = \frac{x}{tg\,\alpha} \simeq 398130 \text{ km}$$

Calcula el diámetro angular de la Luna en el apogeo y en el perigeo:



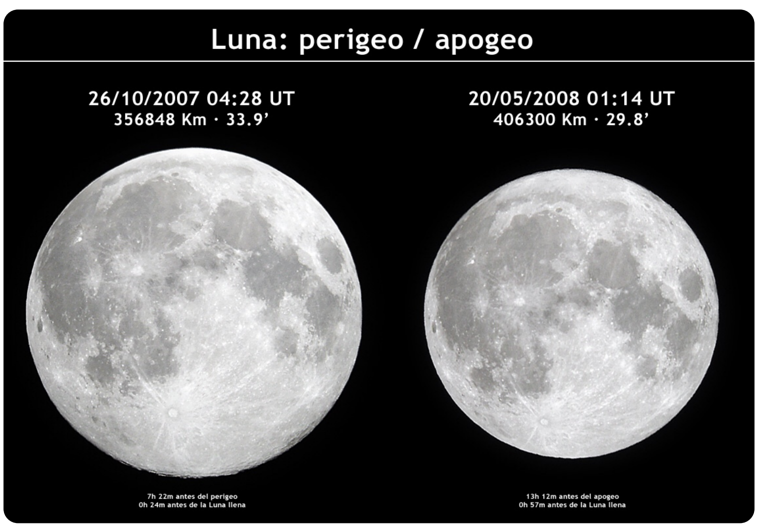
Podemos reconstruir la sombra de la Tierra sobre la Luna con un mosaico de imágenes durante un eclipse lunar. Se puede calcular sobre la imagen que la Tierra tiene un radio 3,7 veces mayor que el de la Luna.

$$tg\,\alpha = \frac{x}{d} = \frac{3474 \cancel{Km}}{356000 \cancel{Km}} \Rightarrow \tan^{-1}\frac{1737\times2}{356000} \approx 0.55910^\circ \simeq 0{,}559^\circ$$

$$tg\,\alpha = \frac{x}{d} = \frac{3474 \cancel{Km}}{406700 \cancel{Km}} \Rightarrow \tan^{-1}\frac{1737\times2}{406700} \approx 0.48940^\circ \simeq 0{,}489^\circ$$

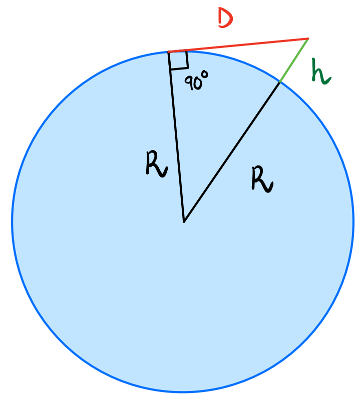
$$\frac{0{,}559^\circ}{0{,}489^\circ}\cdot 100 = \frac{0.559}{0.489}\times100 \approx 114.31493 \simeq 114{,}3 \Rightarrow 0{,}489\times\left(\frac{100+14.314928}{100}\right)\approx 0{,}559$$

El tamaño en el perigeo es un 14,3 % mayor que en el apogeo.



La Luna desde la ISS, detrás la atmósfera de La Tierra

Curvatura de la Tierra y Distancia al horizonte



$R \equiv$ radio de curvatura de la Tierra
$h \equiv$ altura del observador
$D \equiv$ distancia al horizonte

El radio medio de la Tierra $\simeq$ 6370 km

(es más grande en el Ecuador que en los polos).

Aplicamos el teorema de Pitágoras sobre el triángulo rectángulo construido entre el radio terrestre, la altura de observación y la distancia al horizonte.

$$R^2 + D^2 = (R+h)^2 \Rightarrow \cancel{R^2} + D^2 = \cancel{R^2} + h^2 + 2Rh \Rightarrow \boxed{D = \sqrt{h^2 + 2Rh}}$$

Distancia al horizonte

Ejemplo: una persona de 1,70 m de estatura al nivel del mar observará el horizonte:

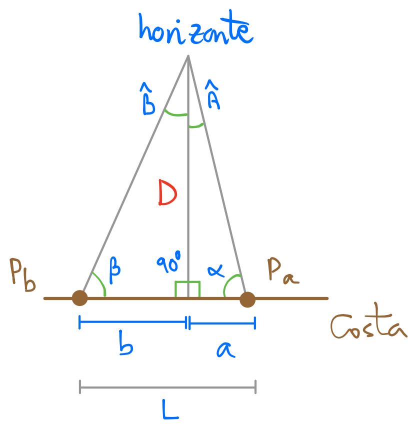
$$D = \sqrt{1{,}7^2 + 2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 \cdot 1{,}70} \simeq 4654 \text{ m} \simeq 4{,}7 \text{ km}$$

Medida de distancias. Problema de la doble tangente. Calculando el radio de la Tierra a partir del horizonte

El problema se puede resolver a la inversa. Determinamos la distancia al horizonte, por ejemplo, la distancia al casco de un buque justo antes de que se oculte en el horizonte. El problema se solventa con la técnica trigonométrica de la doble tangente. A partir de la distancia, se deduce el radio terrestre.

$$R^2 + D^2 = (R+h)^2 \Rightarrow \cancel{R^2} + D^2 = \cancel{R^2} + h^2 + 2Rh \Rightarrow \boxed{R = \frac{D^2 - h^2}{2h}}$$

Radio de curvatura de la Tierra



Veamos cómo calcular la distancia D al horizonte

$\hat{A} + \alpha + 90° = 180°$

$\hat{A} = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$

$\hat{B} + \beta + 90° = 180°$

$\hat{B} = 180° - 90° - \beta = 90° - \beta$

$L = a + b$ Distancia entre los dos puestos de observación P_a y P_b.

tangente $\equiv \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$, la distancia D es la altura de los dos triángulos rectángulos.

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} \hat{A} = \dfrac{a}{D} \\ \operatorname{tg} \hat{B} = \dfrac{b}{D} \end{array}\right\} D = \frac{a}{\operatorname{tg} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{tg} \hat{B}} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{\operatorname{tg} \hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{tg} \hat{B}} \\ L = a + b \end{array}\right\}$$

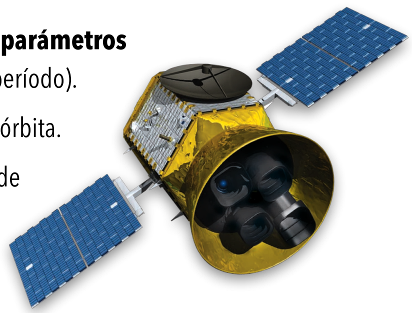
Resuelvo el sistema $\Rightarrow$ D

Con este dato calculo el radio de la Tierra

Esta práctica sigue las directrices de la CiUG.

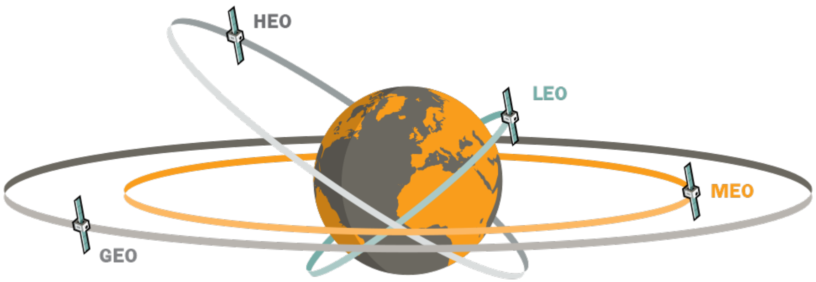
Objetivos

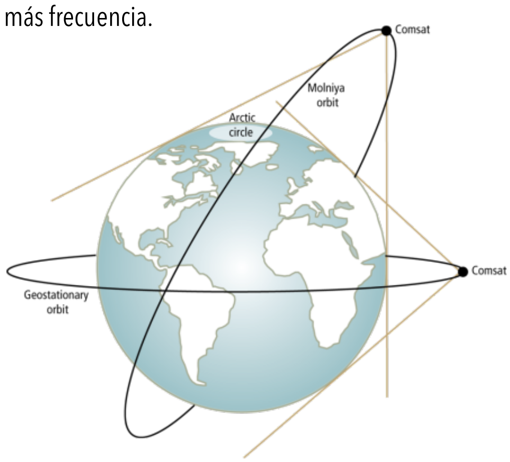
- Aplicar las ecuaciones de la mecánica celeste para determinar los **parámetros orbitales** de un satélite (apogeo, perigeo, altitud - velocidad orbital y período).
- Conocer los diferentes **tipos de satélites terrestres** en función de su órbita.
- Utilizar fuentes de información para encontrar los datos sobre alguno de los satélites que orbitan La Tierra.
- Conocer la utilización de los diferentes tipos de satélites.



Fundamento teórico

Como podrás observar en la **simulación** Stuff in Space) hay muchos tipos de órbitas para colocar los satélites en el espacio. Hay 5 tipos de órbitas que se usan con más frecuencia.





LEO: *Low Earth Orbit.* Comunmente conocida como **órbita baja**, es una amplia franja que se sitúa entre los 160 km y los 2.000 km de altura. Como la velocidad es mayor cuanto más baja sea la órbita, los objetos se mueven a gran velocidad respecto a la superficie terrestre. Como están "rozando" las capas exteriores de la atmósfera terrestre, tienen un rápido decaimiento orbital y precisan ser reposicionados con frecuencia para retornar a la órbita correcta. En este grupo se encuentran la Estación Espacial Internacional (ISS), la mayoría de los satélites meteorológicos o de observación y muchos satélites de comunicaciones.

MEO: *Medium Earth Orbit.* **Órbita circular intermedia**, entre 2.000 y 36.000 km de altura desde la superficie terrestre con un período orbital medio de varias horas. Es utilizada para satélites de observación, defensa y posicionamiento, como las redes de satélites GPS (EEUU), los satélites Glonass (Rusia) o los Galileo (Europa). Un tipo especial de órbita intermedia es la **órbita Molnya** desarrollada por científicos rusos, especialmente usada por los países próximos al círculo polar ártico. Esta órbita es muy elíptica y muy inclinada para tener alta visibilidad desde las zonas polares, permitiendo a los países nórdicos establecer satélites de comunicaciones en zonas donde los geoestacionarios no pueden llegar.

GEO: *Geostationary Orbit.* **Órbita geoestacionaria**. Esta órbita ecuatorial se sitúa a 35.786 km de la superficie terrestre, con un período orbital de 23,93446 horas (coincidiendo con la duración de un día sideral que es unos 4 minutos más corto que el día solar medio de 24h), lo que hace que los satélites situados en esta órbita parezcan "inmóviles" en el espacio, al rotar con la misma velocidad angular que la Tierra. Esta órbita es el lugar donde se sitúan todos los satélites que transmiten las señales de internet, televisión, telefonía y datos a las distintas regiones del planeta.

HEO: *High Earth Orbit.* Básicamente, son todas las **órbitas altas** que se sitúan más allá de las órbitas geoestacionarias, a más de 36.000 km y con períodos orbitales mayores de 24 horas. Muchos de ellos son de uso militar.

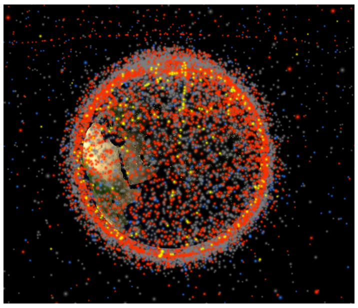
SSO: *Sun Synchronous Orbit.* La **órbita sincrónica solar** es un caso particular de órbita polar que permite que un objeto situado en ella pase todos los días sobre un determinado lugar a la misma hora. Es una órbita utilizada en observación y meteorología.

Procedimiento

Puedes analizar el satélite que más te interese.

Mediante el simulador:

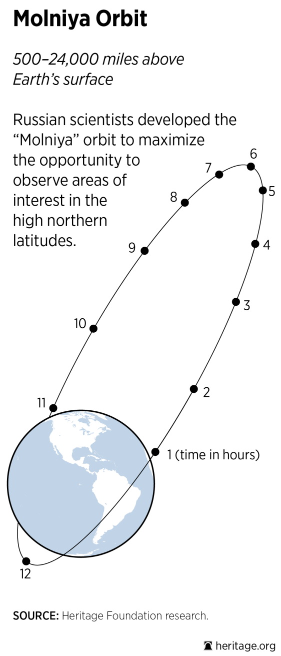
(🌐 Stuff in Space sky.rogue.space) se pueden obtener valores del Apogeo, Perigeo, Altitud, Velocidad orbital y del Período

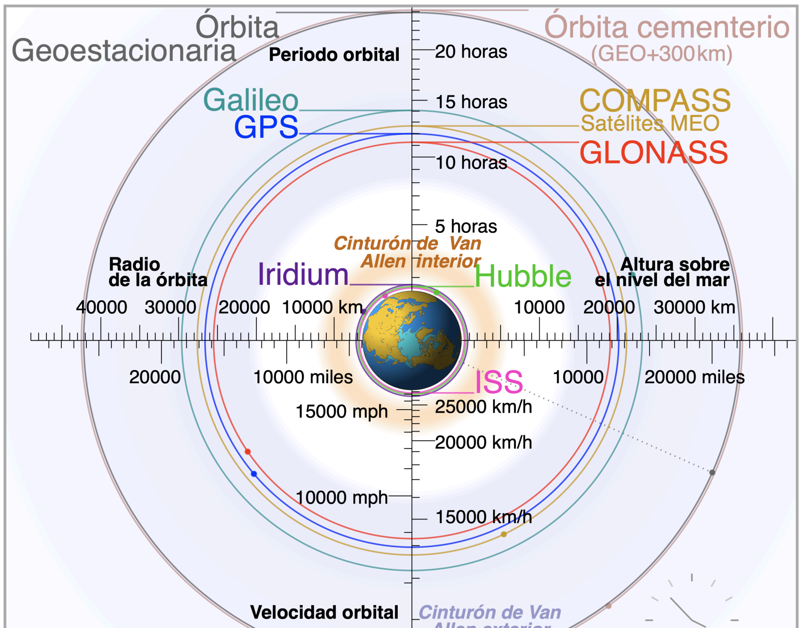


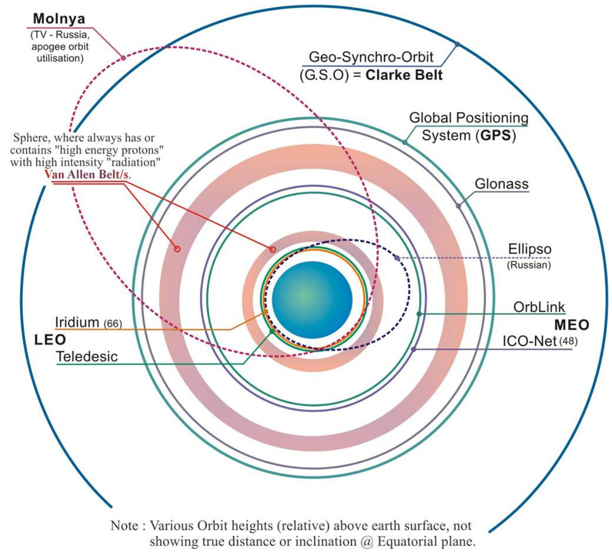
Cuestiones

- 🔷 Determina el tipo de órbita y analiza una posible aplicación del satélite.
- 🔷 Calcula la velocidad en el apogeo y en el perigeo.
- 🔷 Calcula el período orbital y compáralo con el dato recogido en la simulación.
- 🔷 Calcula la energía mecánica total.
- 🔷 Determina la velocidad areolar y comprueba su constancia en la órbita.
- 🔷 Determina la velocidad de escape.

🎥 🌐 Animación: Órbitas de navegación de los satélites





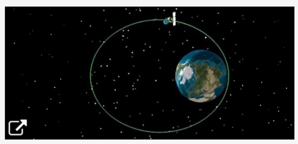


LEO (Low Earth Orbit)

MEO (Medium Earth Orbit)

GEO (Geosynchronous Orbit)

HEO (High Elliptical Orbit)



Fuente: 🌐 Satellites 4 everyone (QR a la derecha)

Más información: 🚀🌐 Blog sobre astronáutica en español: Naukas - Eureka: Daniel Marín

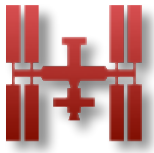
(QR a la izquierda). A la derecha 🌐 ESA Satélites Copernicus

✏️ Actividades de las leyes de Kepler

Ejercicio 1: Dos satélites artificiales, S_1 y S_2 , describen órbitas circulares alrededor de la Tierra con radios $r_1 = 7000\ km$ y $r_2 = 8650\ km$, contenidas en el mismo plano. ¿Cuál es la relación T_1/T_2 entre los períodos orbitales de los satélites S_1 y S_2? ¿Cuál es la relación v_1/v_2 entre sus velocidades orbitales? ¿Y la relación a_1/a_2 entre sus aceleraciones centrípetas?

Ejercicio 2: Sabiendo que la distancia de Marte al Sol es de $1{,}523\ UA$, calcula el período de Marte en años terrestres. La unidad astronómica (UA) es la distancia media de la Tierra al Sol.

Ejercicio 3: Dos planetas de masas iguales orbitan alrededor de una estrella de masa mucho mayor. El planeta 1 describe una órbita circular de radio $r_1 = 1{,}0 \cdot 10^8\ km$ con un período de rotación $T_1 = 2{,}0$ *años*. El planeta 2 describe una órbita elíptica cuya distancia más próxima a la estrella es igual a r_1 y la más alejada es $r_2 = 1{,}8 \cdot 10^8\ km$. ¿Cuál es el período de rotación del planeta 2?



Ejercicio 4: Calcula el valor del campo gravitatorio en la *ISS* (International Space Station). Datos: $g_0 = 9{,}81\ m/s^2$, $R_T = 6370\ km$, $h = 400\ km$

Ejercicio 5: Calcula la velocidad orbital de la estación espacial *ISS* con los datos del problema anterior.

Práctica 1: [ABAU Junio 2019 op.A C.4] A partir de las medidas del radio medio orbital, r, y del período, T, de cuatro satélites que orbitan la Tierra se obtiene la tabla adjunta. Representa estos datos en una gráfica y determina a partir de ella la masa de la Tierra. Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$

Satélite	$T^2\ [s^2]$	$r^3\ [km^3]$
1	$3{,}18 \cdot 10^7$	$3{,}29 \cdot 10^{11}$
2	$3{,}89 \cdot 10^7$	$4{,}05 \cdot 10^{11}$
3	$4{,}75 \cdot 10^7$	$4{,}93 \cdot 10^{11}$
4	$1{,}44 \cdot 10^8$	$1{,}48 \cdot 10^{12}$

Práctica 2: A partir de las medidas del radio medio orbital, r, y del período, T, de la Tierra, Marte y Venus que orbitan alrededor del Sol, se obtiene la tabla adjunta. Representa estos datos en una gráfica de T^2 [días^2] frente a $r^3\ [km^3]$.
Determina a partir de los datos la masa del Sol y la incertidumbre (calcula la media de los 3 valores que obtienes para los 3 planetas). Justifica la fórmula que utilices.
Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$

Planeta	T [días]	$r\ [km]$
Tierra	365	$1{,}5 \cdot 10^8$
Marte	687	$2{,}28 \cdot 10^8$
Venus	225	$1{,}08 \cdot 10^8$

Práctica 3: En el centro de la Vía Láctea se encuentra el agujero negro supermasivo Sagitario A*. Está situado en el foco común de las órbitas elípticas de más de doscientas estrellas que lo orbitan. Calcula la masa de Sgr A* a partir de las medidas del radio medio orbital, r, y del período, T, de seis estrellas que lo orbitan (ver tabla adjunta). Realiza también el cálculo a partir de la gráfica de T^2 frente a r^3.
$1\ UA = 1{,}5 \cdot 10^8\ km$ (distancia Sol-Tierra).
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$

Estrella	T [años]	$r\ [UA]$
S1	94,1	3300
S2	15,2	980
S8	67,2	2630
S12	54,4	2290
S13	36	1750
S14	38	1800

Actividades de la ley de la Gravitación

Ejercicio 6: Calcula la masa del Sol a partir del período y distancia orbital de La Tierra ($1 \ UA$).
Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \ N \cdot m^2/kg^2$, $1 \ UA = 1{,}5 \cdot 10^8 \ km$, $T = 1$ *año*.

Ejercicio 7: Cuestión: ¿De qué diferentes maneras podríamos calcular la masa de La Tierra?

Ejercicio 8: Calcula a qué altura se halla un satélite geoestacionario (que mantiene su posición sobre un mismo punto de la Tierra; su periodo orbital es pues de 24 *horas*). Calcula su velocidad orbital.
Datos: $g_0 = 9{,}81 \ m/s^2$, $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6 \ m$

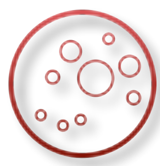
Ejercicio 9: Galileo observó las lunas de Júpiter en 1610. Descubrió que Ío, el satélite más cercano a Júpiter que pudo observar en su época, poseía un período orbital de $1{,}8$ *días*, y estimó que el radio de su órbita era 3 veces el diámetro de Júpiter.

Asimismo, encontró que el período orbital de Calisto (la cuarta luna más alejada de Júpiter) era de $16{,}7$ *días*. Con estos datos, suponiendo órbitas circulares y utilizando el dato de que el radio de Júpiter es de $7{,}15 \cdot 10^7 \ m$. Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \ N \cdot m^2/kg^2$

a) Calcula la masa de Júpiter
b) Determina el radio de la órbita de Calisto.

Ejercicio 10: El 4 de octubre de 1957 la URSS lanzó al espacio el primer satélite artificial, el Sputnik 1. Este describía una órbita de $586 \ km$ de altura sobre la superficie terrestre. Suponiendo que la órbita era circular, calcula:
a) El período de rotación del satélite en su órbita alrededor de la Tierra.
b) La velocidad a la que giraba el Sputnik y la aceleración centrípeta en la órbita.
Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \ N \cdot m^2/kg^2$, $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6 \ m$, $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24} \ kg$

Ejercicio 11: Calcula cuál es la razón entre tu peso en La Tierra y tu peso en Marte y en Júpiter.
Datos: $R_{Tierra} = 6370 \ km$



$R_{Marte} = 3397 \ km$, $M_{Marte} = 0{,}107 \cdot M_{Tierra}$
$R_{Jupiter} = 71492 \ km$, $M_{Jupiter} = 318 \cdot M_{Tierra}$

Ejercicio 12: Calcula el punto de equilibrio gravitatorio (campo nulo) entre la Tierra y la Luna.
Dato: $M_T = 81 \cdot M_L$

Actividades sobre el campo en el interior de un planeta

Ejercicio 13: Un planeta esférico tiene la misma densidad media que la Tierra, pero la mitad de radio. Calcula la aceleración en su superficie, el período orbital de un satélite situado a $400 \ km$ de altura y el valor del campo en el interior del planeta. Datos: $g_0 = 9{,}81 \ m/s^2$, $R_T = 6370 \ km$

Actividades de Energía y Velocidad de escape

Ejercicio 14: Problema del radio de Schwartzchild. Calcula el tamaño al que hay que reducir un cuerpo, conocida su masa, para convertirlo en un agujero negro (objeto del que ni siquiera la luz puede escapar).

Ejercicio 15: Deduce la expresión de la energía cinética de un satélite en órbita circular en función de las masas y el radio. Demuestra que la energía mecánica es igual a la mitad de su energía potencial.

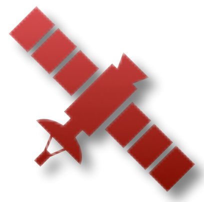
Ejercicio 16: Dada la relación entre las masas y los radios de la Tierra y Marte, calcula la velocidad de escape de Marte. Datos: $g_0 = 9{,}81\ m/s^2$, $R_T = 6370\ km$, $M_m = M_T/9$, $R_m = 0{,}5 \cdot R_T$

Ejercicio 17: ¿Cuál sería la altura máxima alcanzada por un proyectil lanzado verticalmente hacia arriba, desde la superficie de Marte, a $7{,}2 \cdot 10^3\ km/h$? Puedes utilizar los datos del problema anterior.

Ejercicio 18: El satélite Giove-B (parte del sistema de navegación europeo Galileo) tiene una masa de $5{,}0 \cdot 10^2\ kg$ y su órbita se encuentra a una distancia de $2{,}32 \cdot 10^7\ m$ de la superficie terrestre. Determina:

a) Las energías potencial, cinética y mecánica del satélite.
b) La energía mínima necesaria para ponerlo en dicha órbita.
c) La velocidad de escape de esta órbita.

Datos: $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}\ kg$, $R_T = 6370\ km$, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$



✏️ Actividades sobre el momento angular

Ejercicio 19: Cuestión: Las órbitas planetarias son planas porque:

a) Los planetas tienen inercia.
b) No varía el momento angular al ser una fuerza central.
c) No varía el momento de inercia de los planetas en su recorrido.

Ejercicio 20: Cuestión: Aplica la conservación del momento angular al perihelio y el afelio de un planeta en torno al Sol para ver la relación entre distancia y velocidad.

✏️ Actividades de masas puntuales

Ejercicio 21: Tenemos 3 masas de $10\ kg$ dispuestas en los 3 de los 4 vértices de un cuadrado de $2\ m$ de lado. Calcula el campo gravitatorio en el 4° vértice. ¿Qué fuerza se ejercería sobre una masa de $5\ kg$ situada en ese punto?

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$

Ejercicio 22: Tenemos dos masas de $150\ kg$ situadas en $A(0{,}0)$ y $B(12{,}0)$.
Calcula el campo en los puntos $(6{,}0)$ y $(6{,}8)$. Las unidades están en el SI.

Ejercicio 23: Dos partículas de masas m_1 y $m_2 = 9 \cdot m_1$ están separadas una distancia $d = 3\ m$. En el punto P, situado entre ellas, el campo gravitatorio total creado por estas partículas es nulo. Calcula la distancia x entre P y m_1 .

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$

Ejercicio 24: Tenemos dos masas de $150\ kg$ situadas en $A(0{,}0)$ y $B(12{,}0)$. Calcula el trabajo necesario para trasladar una masa de $20\ kg$ de $D(6{,}8)$ a $C(6{,}0)$ y viceversa, de C a D.

✏️ **Cuestiones de Gravitación (extraídas de exámenes propios del colegio)**

1. [2016-2017 EVA1 Control inicial]
   Para un satélite geoestacionario el radio de su órbita se obtiene mediante la expresión:

   a) $r = \sqrt[3]{\dfrac{T^2GM}{4\pi^2}}$ b) $r = \sqrt{\dfrac{T^2g_0R_T}{4\pi^2}}$ c) $r = \sqrt[3]{\dfrac{TGM^2}{4\pi^2}}$

2. [2016-2017 EVA1 Control de gravitación] Plutón describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Indica cuál de las siguientes magnitudes es mayor en el afelio (punto más alejado del Sol) que en el perihelio (punto más próximo):
   a) Momento angular respecto a la posición del Sol
   b) Momento lineal
   c) Energía potencial

3. [2016-2017 EVA1 Control global] Un satélite gira alrededor de un planeta describiendo una órbita elíptica ¿Cuál de las siguientes magnitudes permanece constante?:

   a) Momento angular. b) Momento lineal. c) Energía potencial.

4. [2016-2017 EVA2 Control global] En torno al Sol giran dos planetas cuyos períodos de revolución son $3{,}66 \cdot 10^2$ *días* y $4{,}32 \cdot 10^2$ *días* respectivamente.
   Si el radio de la órbita del primero es $1{,}49 \cdot 10^{11}\ m$, la órbita del segundo es:

   a) La misma. b) Menor. c) Mayor.

5. [2017-2018 EVA1 Control de gravitación] Dos satélites de comunicaciones A y B con diferentes masas $m_A > m_B$ giran alrededor de la Tierra con órbitas estables de diferente radio siendo $r_A < r_B$:
   a) B tiene menor período orbital
   b) A gira con mayor velocidad lineal
   c) Los dos tienen la misma energía mecánica

6. [2017-2018 EVA2 Control global] Deduce la relación que hay entre la energía mecánica gravitatoria y la energía potencial gravitatoria de un satélite en una órbita circular:

   a) $E_m = -\dfrac{1}{2} \cdot Ep$ b) $E_m = 2 \cdot Ep$ c) $E_m = \dfrac{1}{2} \cdot Ep$

7. [2018-2019 EVA1 Control inicial] Si g_0 es la intensidad de campo gravitatorio en la superficie terrestre, determina, en función del radio de la Tierra R_T, la altura h sobre la superficie terrestre a la cual la intensidad del campo gravitatorio es la mitad, es decir, $g_0/2$.

   a) $h = \left(\sqrt{2}+1\right) \cdot R_T$ b) $h = \sqrt{2} \cdot R_T$ c) $h = \left(\sqrt{2}-1\right) \cdot R_T$

8. [2018-2019 EVA1 Control inicial] Si la Tierra sufriese un colapso gravitatorio y su radio se redujese a la mitad, ¿cómo sería su período de revolución alrededor del Sol?
   a) Igual (1 año) b) 2 años c) 4 años
   Razona bien la respuesta. ¿Qué ley has utilizado?

9. [2018-2019 EVA1 Control de gravitación] Señala cuál de las siguientes afirmaciones acerca de la conservación del momento angular de una partícula es falsa (Justifica la respuesta):
   a) Si el momento angular se conserva, el movimiento es plano.
   b) El momento angular se conserva únicamente si la fuerza total es nula.
   c) El momento angular se conserva si la fuerza total es un campo central.

10. [2018-2019 EVA1 Control de gravitación] Si un satélite artificial describe órbitas circulares alrededor de la Tierra, justifica cuál de las siguientes afirmaciones es correcta respecto a su energía mecánica E_m y sus velocidades orbital v y de escape v_e :

    a) $E_m < 0$ y $v > v_e$ b) $E_m > 0$ y $v > v_e$
    c) $E_m < 0$ y $v < v_e$ d) $E_m > 0$ y $v < v_e$

11. [2018-2019 EVA2 Control global] Deduce la relación que hay entre el campo gravitatorio de La Tierra g_0 y el campo gravitatorio de un exoplaneta P, descubierto por el telescopio espacial Kepler, cuyo radio es la tercera parte del terrestre y cuya masa es la mitad de la terrestre:

    a) $g_P = \frac{3}{2} \cdot g_0$ b) $g_P = \frac{2}{9} \cdot g_0$ c) $g_P = \frac{9}{2} \cdot g_0$

12. [2018-2019 EVA3 Control global Op B]
    Indica justificadamente cuándo la energía potencial de un planeta es constante:
    a) Siempre. b) Si la órbita es circular. c) Si la órbita es elíptica.

13. [2019-2020 EVA1 Control inicial] ¿Cómo **varía el campo gravitatorio** g desde el centro de la Tierra hasta la superficie donde vale g_0 ? Suponemos que la densidad de la Tierra es constante.
    a) Es constante: $g = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$
    b) Aumenta linealmente con la distancia r al centro de la Tierra: $g = g_0 \cdot \frac{r}{R_T}$
    c) Varía con la distancia r al centro de la Tierra según $g = G \frac{M_T}{\left(R_T + r\right)^2}$

14. En el movimiento de la Tierra alrededor del Sol:
    a) Se conserva el momento angular y el momento lineal.
    b) Se conserva el momento lineal y el momento de la fuerza que los une.
    c) Varía el momento lineal y se conserva el momento angular.

Soluciones: 1.a , 2.c , 3.a , 4.c , 5.b , 6.c , 7.c , 8.a , 9.b , 10.c , 11.c , 12.b , 13.b , 14.c