

TEORIA. Conteste solo uno de los dos bloques.

Bloque A

A.1 Producto escalar de vectores. Condición de perpendicularidad y ángulo entre vectores.

(1 punto)

A.2 Componentes intrínsecas de la aceleración. Definición y significado físico. **(1 punto)**

Bloque B

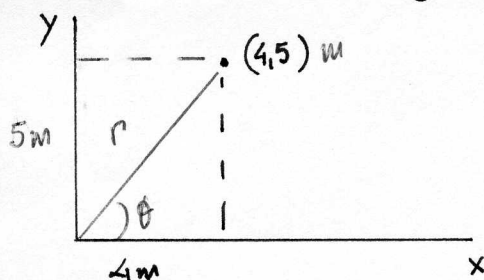
B.1. Producto vectorial de vectores. Condición de paralelismo. **(1 punto)**

B.2 Vectores posición, velocidad y aceleración instantáneos de un cuerpo. Definición y unidades. **(1 punto)**

CUESTIONES OPTATIVAS. Conteste solo uno de los dos bloques.

Bloque C

C.1 Las coordenadas rectangulares de un punto son (4,5)m. Obtenga sus coordenadas polares (r,θ) **(1 punto)**



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ m} = \sqrt{4^2 + 5^2} \text{ m} = \sqrt{16 + 25} \text{ m} = \sqrt{41} \text{ m} = 6,4 \text{ m}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{5}{4} = \arctan 1,25 = 51,34^\circ$$

$$\text{COORD. POLARES} = (6,4 \text{ m}, 51,34^\circ)$$

C.2 Dados los vectores $\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ y $\vec{B} = -6\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ calcule el ángulo que forman **(1 punto)**

USAREMOS LA DEFINICION DE PRODUCTO ESCALAR $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \widehat{AB}$

$$\cos \widehat{AB} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$$

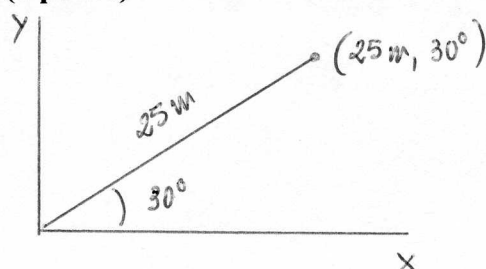
$$|\vec{A}| = \sqrt{4 + 9 + 25} = \sqrt{38}; \quad |\vec{B}| = \sqrt{36 + 9 + 16} = \sqrt{61}$$

$$\cos \widehat{AB} = \frac{-12 - 9 + 20}{\sqrt{38} \sqrt{61}} = \frac{-21 + 20}{6,16 \cdot 7,81} = \frac{-1}{48,1} = -0,020785 \rightarrow \widehat{AB} = 91,2^\circ$$

Bloque D

D.1. Las coordenadas polares de un punto son (25m, 30°). Obtenga sus coordenadas rectangulares (x,y).

(1 punto)



$$x = r \cos \theta = 25 \text{ m} \cos 30^\circ = 25 \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m} = 21,65 \text{ m}$$

$$y = r \sin \theta = 25 \text{ m} \sin 30^\circ = 25 \frac{1}{2} \text{ m} = 12,5 \text{ m}$$

$$\text{COORD. RECTANGULARES} = (21,7, 12,5) \text{ m}$$

D.2. Dados los vectores $\vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ y $\vec{B} = 6\vec{i} - 4\vec{j} + 10\vec{k}$ demuestre que son paralelos **(1 punto)**

SI SON PARALELOS $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 5 \\ 6 & -4 & 10 \end{vmatrix} = (-20 + 20)\vec{i} - (30 - 30)\vec{j} + (-12 + 12)\vec{k} = 0\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0} \rightarrow \text{SON PARALELOS}$$

PROBLEMAS. Se resolverán sólo dos problemas.

1. Dados los vectores $\vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ y $\vec{B} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ calcule

a) Módulo y cosenos directores de ambos vectores. (1 punto).

$$|\vec{A}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 4 + 25} = \sqrt{38}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}$$

COSENO DIRECTORES DE $\vec{A}$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{38}} = \frac{3\sqrt{38}}{38} = 0,487; \cos \beta = \frac{-2\sqrt{38}}{38} = -0,324$$

$$\cos \gamma = \frac{5\sqrt{38}}{38} = 0,811$$

COSENO DIRECTORES DE $\vec{B}$

$$\cos \alpha = \frac{-2\sqrt{29}}{29} = -0,371$$

$$\cos \beta = \frac{3\sqrt{29}}{29} = 0,557$$

$$\cos \gamma = \frac{4\sqrt{29}}{29} = 0,743$$

b) $\vec{A} + \vec{B}$; $\vec{B} - \vec{A}$; $\vec{A} \cdot \vec{B}$ (1 punto).

$$\vec{A} + \vec{B} = (3-2)\vec{i} + (-2+3)\vec{j} + (5+4)\vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + 9\vec{k}$$

$$\vec{B} - \vec{A} = (-2-3)\vec{i} + (3+2)\vec{j} + (4-5)\vec{k} = -5\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 4 = -6 - 6 + 20 = -12 + 20 = 8$$

c) Producto vectorial de ambos $\vec{A} \wedge \vec{B}$ y módulo de dicho producto $|\vec{A} \wedge \vec{B}|$ (1 punto).

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-8-15)\vec{i} - (12+10)\vec{j} + (9-4)\vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -23\vec{i} - 22\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$|\vec{A} \wedge \vec{B}| = \sqrt{(-23)^2 + (-22)^2 + 5^2} = \sqrt{529 + 484 + 25} = \sqrt{1038} = 32,22$$

2. El movimiento de una partícula viene dado por el vector posición $\vec{r}(t) = (4t^2 + t)\vec{i} + (2t^3)\vec{j} + 4t\vec{k}$ m encuentre:

a) Vector velocidad en función de t, su módulo y el valor de ambos a los 4 s. (1 punto).

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (8t+1)\vec{i} + 6t^2\vec{j} \text{ m/s} \quad \vec{v}(4s) = 33\vec{i} + 96\vec{j} \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(8t+1)^2 + (6t^2)^2} = \sqrt{64t^2 + 16t + 1 + 36t^4} \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}|(4s) = \sqrt{64 \cdot 16 + 16 \cdot 4 + 1 + 36 \cdot 4^4} \text{ m/s} = 101,5 \text{ m/s}$$

PUEDE COMPROBARSE QUE COINCIDE CON $|\vec{v}(4s)|$

b) Vector aceleración en función de t, su módulo y el valor de ambos a los 4 s. (1 punto).

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 8\vec{i} + 12t\vec{j} \text{ m/s}^2 \quad \vec{a}(4s) = 8\vec{i} + 48\vec{j} \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{64 + 144t^2} \text{ m/s}^2 \quad |\vec{a}(4s)| = \sqrt{64 + 2304} \text{ m/s}^2 = 48,1 \text{ m/s}^2$$

c) Módulos de la aceleración tangencial y normal a los 4 s. (1 punto).

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{144t^3 + 128t + 16}{2\sqrt{36t^4 + 64t^2 + 16t + 1}} = \frac{72t^3 + 64t + 8}{\sqrt{36t^4 + 64t^2}}; a_t(4s) = 48,1 \text{ m/s}^2$$

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2 \rightarrow a_n^2 = a^2 - a_t^2 \rightarrow a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{2368 - 2313,6} \text{ m/s}^2 = 7,37 \text{ m/s}^2$$

3. El movimiento de una partícula viene dado por el vector posición $\vec{r}(t) = (4t^2 + t)\vec{i} + (2t^3)\vec{j} + 4\vec{k}$ m encuentre:

a) Velocidad media en los 5 primeros segundos. (1 punto).

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(5) - \vec{r}(0)}{5s} = \frac{(105\vec{i} + 250\vec{j} + 4\vec{k}) - 4\vec{k}}{5} \text{ m/s} = \frac{105\vec{i} + 250\vec{j}}{5} \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_m = 21\vec{i} + 50\vec{j} \text{ m/s}$$

b) Producto escalar de $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$ (1 punto).

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (8t + 1)\vec{i} + 6t^2\vec{j}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = [(4t^2 + t)\vec{i} + (2t^3)\vec{j} + 4\vec{k}] \cdot [(8t + 1)\vec{i} + 6t^2\vec{j}] = (4t^2 + t)(8t + 1) + 6t^2(2t^3) \\ = 32t^3 + 8t^2 + 4t^2 + t + 12t^5 = 12t^5 + 32t^3 + 12t^2 + t$$

c) Aceleración media en los 5 primeros segundos. (1 punto).

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(5) - \vec{v}(0)}{5s} = \frac{(41\vec{i} + 150\vec{j}) - \vec{i}}{5} \text{ m/s}^2 = \frac{40\vec{i} + 150\vec{j}}{5} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_m = 8\vec{i} + 30\vec{j} \text{ m/s}^2$$