

Nombre: _____

ORIENTACIONES: Comente sus planteamientos de tal modo que demuestre que entiende lo que hace. Tenga en cuenta que la extensión de sus respuestas está limitada por el tiempo y el papel de que dispone. Recuerde expresar todas las magnitudes físicas con sus unidades.

TEORIA

T.1. Producto escalar de vectores. Condición de perpendicularidad. (1 punto).

T.2. Componentes intrínsecas de la aceleración. Significado físico. (1 punto).

CUESTIONES

C.1. El vector de posición de una partícula en el instante inicial es $\vec{r} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ m. Calcula el producto mixto: $\vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{A})$, siendo $\vec{A}$ un vector cualquiera. (1 punto).

Si llamamos $\vec{P} = \vec{r} \times \vec{A}$ entonces $\vec{P} \perp \vec{r}$ y $\vec{P} \perp \vec{A}$
 con esto $\vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{A}) = \vec{r} \cdot \vec{P}$ y como $\vec{P} \perp \vec{r} \rightarrow \vec{r} \cdot \vec{P} = 0 \rightarrow \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{A}) = 0$

OTRA FORMA $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$

$$\vec{r} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 1 \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = (-4A_z - A_y)\vec{i} - (3A_z - A_x)\vec{j} + (3A_y + 4A_x)\vec{k}$$

$$\vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{A}) = 3(-4A_z - A_y) + 4(3A_z - A_x) + (3A_y + 4A_x) = -12A_z - 3A_y + 12A_z - 4A_x + 3A_y + 4A_x = 0$$

C.2. Una partícula de 23,2 kg se encuentra en el punto (20,35 ; 15,02)m de un sistema cartesiano. Encuentre sus coordenadas polares. (1 punto).

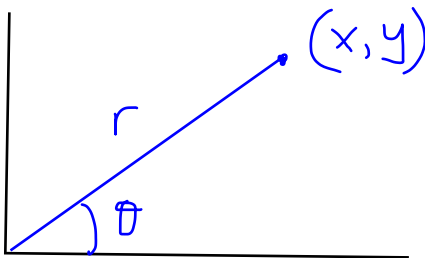
$$(x, y) \rightarrow (r, \theta)$$

$$x = 20,35 \text{ m} \quad y = 15,02 \text{ m}$$

$$r = \sqrt{(20,35 \text{ m})^2 + (15,02 \text{ m})^2} = 25,29 \text{ m}$$

$$\theta = \arctg \frac{y}{x} = \arctg \frac{15,02 \text{ m}}{20,35 \text{ m}} = \arctg 0,7381 = 36,4^\circ$$

$$(r, \theta) = (25,29 \text{ m}; 36,4^\circ)$$



PROBLEMAS

P.1.: Definamos el vector cantidad de movimiento como $\vec{p} = m\vec{v}$, siendo m la masa de una partícula, que para este caso, tendrá un valor de $m = 3 \text{ kg}$. El vector de posición de dicha partícula en un instante de tiempo es $\vec{r} = (1 + \sqrt{2})\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} \text{ m}$, y su vector velocidad en ese mismo instante $\vec{v} = -2\sqrt{2}\vec{i} + 2\sqrt{2}\vec{j} \text{ m/s}$. Calcula:

a) El momento angular de la partícula ($L = \vec{r} \times \vec{p}$). (1 punto). $\vec{p} = m\vec{v} = 3\text{ kg}(-2\sqrt{2}\vec{i} + 2\sqrt{2}\vec{j}) \text{ m/s} = -6\sqrt{2}\vec{i} + 6\sqrt{2}\vec{j} \text{ kg m/s}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (1+\sqrt{2}) & \sqrt{2} & 0 \\ -6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = 6\sqrt{2}(1+\sqrt{2}) + 6\sqrt{2}\sqrt{2} \vec{k} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

$$\vec{L} = (6\sqrt{2} + 12 + 12)\vec{k} \text{ kg m}^2/\text{s} = 6(4 + \sqrt{2})\vec{k} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

Si tomamos $\sqrt{2} = 1,41$

$$\vec{L} = (6 \cdot 5,41)\vec{k} \text{ kg m}^2/\text{s} = 32,5 \vec{k} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

b) Calcula el ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{v}$. (1 punto).

$$\text{PARTIMOS DE } \vec{r} \cdot \vec{v} = |\vec{r}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{|\vec{r}| |\vec{v}|}$$

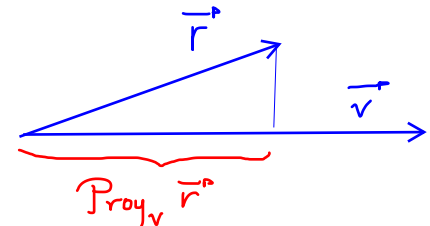
$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 2} = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}} = 2,8 \text{ m}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{8 + 8} = \sqrt{16} = 4 \text{ m/s}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{|\vec{r}| |\vec{v}|} = \frac{(1+\sqrt{2})(-2\sqrt{2}) + \sqrt{2}(2\sqrt{2})}{2,8 \cdot 4} = \frac{-2\sqrt{2} - 4 + 4}{11,2} = -\frac{2\sqrt{2}}{11,2} = -0,2518$$

$$\alpha = \arccos(-0,2518) = 104,6^\circ$$

- c) La proyección del vector $\vec{r}$ en la dirección de $\vec{v}$. Y los cosenos directores de $\vec{v}$. (1 punto).



$$\text{Proy}_v \vec{r} = \vec{r} \cdot \vec{u}_v = \vec{r} \cdot \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v}$$

$$\text{Proy}_v \vec{r} = \frac{-2\sqrt{2} \text{ m/s}}{4 \text{ m/s}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m}$$

CASENOS DIRECTORES DE $\vec{v}$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{-2\sqrt{2} \text{ m/s}}{4 \text{ m/s}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \beta = \frac{v_y}{v} = \frac{2\sqrt{2} \text{ m/s}}{4 \text{ m/s}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

P.2.: Dadas las ecuaciones paramétricas del movimiento de una partícula

$$x(t) = 0,35t \text{ m}$$

$$y(t) = 2,25 - 5,00t^2 \text{ m}$$

- a) Escriba los vectores de posición, velocidad y aceleración de la partícula en cualquier instante y el valor de los mismos para $t = 0,35\text{s}$ (1 punto).

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = (0,35t)\vec{i} + (2,25 - 5,00t^2)\vec{j} \text{ m}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 0,35\vec{i} - 10,0t\vec{j} \text{ m/s} \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -10,0\vec{j} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{r}(0,35\text{s}) = (0,35 \cdot 0,35)\vec{i} + (2,25 - 5,00 \cdot 0,35^2)\vec{j} \text{ m} = (0,12)\vec{i} + (2,25 - 5,00 \cdot 0,12)\vec{j} \text{ m}$$

$$\vec{r}(0,35\text{s}) = 0,12\vec{i} + 1,65\vec{j} \text{ m}$$

$$\vec{v}(0,35\text{s}) = 0,35\vec{i} - 3,5\vec{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{a}(0,35\text{s}) = -10,0\vec{j} \text{ m/s}^2$$

- b) Vectores aceleración tangencial y normal a los 0,35s (1 punto).

$$\vec{a}_T = a_T \vec{u}_T \quad \begin{cases} a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{0,35^2 + 100t^2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{0,12 + 100t^2} \right) = \frac{200t}{\sqrt{0,12 + 100t^2}} \text{ m/s}^2 \\ \vec{u}_T = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{0,35\vec{i} - 10,0t\vec{j}}{\sqrt{0,12 + 100t^2}} \end{cases}$$

$$\vec{a}_T = \frac{100t}{\sqrt{0,12 + 100t^2}} \cdot \frac{(0,35\vec{i} - 10,0t\vec{j})}{\sqrt{0,12 + 100t^2}} \text{ m/s}^2 = \frac{100t(0,35\vec{i} - 10,0t\vec{j})}{(0,12 + 100t^2)} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N \quad \vec{a}_N = (-10,0\vec{j}) - \frac{100t(0,35\vec{i} - 10,0t\vec{j})}{(0,12 + 100t^2)} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_N = \vec{a} - \vec{a}_T \quad \vec{a}_N = -\frac{35t}{(0,12 + 100t^2)}\vec{i} - 10,0 \left(1 - \frac{100t}{(0,12 + 100t^2)} \right) \vec{j} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_N = -\frac{1}{(0,12 + 100t^2)} (35t\vec{i} - 1,2\vec{j}) \text{ m/s}^2$$

VALORES PARA $t = 0,35\text{s}$ AL FINAL DEL EXAMEN

c) Radio de curvatura
decir el tipo de movimiento que lleva? (1 punto).

a los 0,35s. Ecuación de la trayectoria ($y=f(x)$). ¿Podrías

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} \quad \rho = \frac{v^2}{a_N} = \frac{0,35^2 + (-3,5)^2 \frac{m^2}{s^2}}{1,0 \frac{m}{s^2}} = \frac{12,37}{1,0} m$$

$$\boxed{\rho = 12 \text{ m}}$$

De $x(t)$ despejamos t
Sustituimos en y

$$x = 0,35t \rightarrow t = \frac{x}{0,35} \rightarrow t^2 = \frac{x^2}{0,12}$$

$$y = 2,25 - 5,00 \frac{x^2}{0,12} \rightarrow \boxed{y = 2,25 - 41,7 x^2}$$

LA TRAYECTORIA ES UNA PARABOLA $\rightarrow$ MOVIMIENTO PARABÓLICO

Las letras en negrita representan vectores

$$\vec{a}_T(0,35s) = \frac{100 \cdot 0,35}{(0,12 + 100 \cdot 0,35^2)} (0,35 \vec{i} - 10,0 \cdot 0,35 \vec{j}) \frac{m}{s^2}$$

$$\vec{a}_T(0,35s) = \frac{35}{12,37} (0,35 \vec{i} - 3,5 \vec{j}) \frac{m}{s^2} = 2,9 (0,35 \vec{i} - 3,5 \vec{j}) \frac{m}{s^2}$$

$$\vec{a}_T(0,35s) = 1,0 \vec{i} - 10 \vec{j} \frac{m}{s^2}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_N(0,35s) &= \vec{a}(0,35s) - \vec{a}_T(0,35s) \\ &= [-10 \vec{j} \frac{m}{s^2}] - [1,0 \vec{i} - 10 \vec{j} \frac{m}{s^2}] = \\ &= -1,0 \vec{i} \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

$$|\vec{a}_N(0,35s)| = 1,0 \frac{m}{s^2}$$