

ORIENTACIONES: Comente sus planteamientos de tal modo que demuestre que entiende lo que hace. Tenga en cuenta que la extensión de sus respuestas está limitada por el tiempo y el papel de que dispone. Recuerde expresar todas las magnitudes físicas con sus unidades.

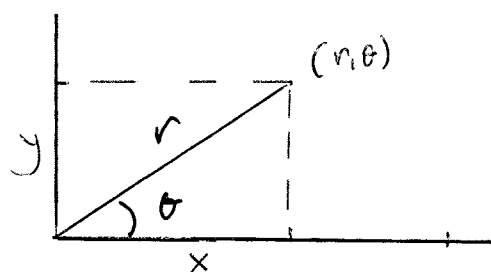
TEORIA

T.1 Producto escalar de vectores. Condición de perpendicularidad. (1 punto).

T.2. Componentes intrínsecas de la aceleración. Significado físico. (1 punto).

CUESTIONES

C.1 Las coordenadas polares de una partícula son $(r, \theta) = (45\text{m}, 30^\circ)$ obtenga las coordenadas cartesianas en el plano correspondientes. (1 punto).



SE CUMPLE $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$

$$x = 45\text{m} \cos 30^\circ = 45 \frac{\sqrt{3}}{2} \text{m} \approx 39,0 \text{m}$$

$$y = 45\text{m} \sin 30^\circ = 45 \frac{1}{2} = 22,5 \text{m}$$

$$(x, y) = (39,0, 22,5) \text{m}$$

C.2 La posición de una partícula viene dada por $\vec{r} = (2t^2 + 3)\vec{i} - (4t^3 - 3)\vec{j}$ Calcule la velocidad media en los 2 primeros segundos. (1 punto).

$$\vec{V}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(2\text{s}) - \vec{r}(0\text{s})}{2\text{s}} = \frac{[11\vec{i} - 29\vec{j}] - [3\vec{i} + 3\vec{j}]}{2\text{s}} \text{m}$$

$$\vec{V}_m = \frac{8\vec{i} - 32\vec{j}}{2} \text{m/s}$$

$$\vec{V}_m = 4\vec{i} - 16\vec{j} \text{m/s}$$

PROBLEMAS

P.1. sean los vectores

$$\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k} \quad \text{y} \quad \vec{B} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

Calcule:

a) $\vec{A} \cdot \vec{B}$; $\vec{A} \times \vec{B}$; $\vec{A} - 2\vec{B}$; $\vec{u}_B$ (Vector unitario en la dirección de $\vec{B}$). (1 punto).

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2 \cdot 1) + (3 \cdot (-1)) + (-4 \cdot 3) = 2 - 3 - 12 = -13$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = -13$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (9 - 4)\vec{i} - (6 + 4)\vec{j} + (-2 - 3)\vec{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = 5\vec{i} - 10\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\vec{A} - 2\vec{B} = (2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}) - 2(\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) = (2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}) - (2\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k})$$

$$\vec{A} - 2\vec{B} = 0\vec{i} + 5\vec{j} - 10\vec{k}$$

$$\vec{A} - 2\vec{B} = 5\vec{j} - 10\vec{k}$$

$$\vec{u}_B = \frac{\vec{B}}{B} = \frac{\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{11}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{11}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{11}}\vec{k}$$

b) Calcule el seno del ángulo que forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. (1 punto).

1ª FORMA $|\vec{A} \times \vec{B}| = A \cdot B \cdot \sin \alpha \rightarrow \sin \alpha = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{A \cdot B} = \frac{\sqrt{25+100+25}}{\sqrt{29} \sqrt{11}}$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{150}}{\sqrt{319}} = \sqrt{\frac{150}{319}} = \sqrt{0,47} = 0,6857$$

$\sin \alpha = 0,6857$

2ª FORMA: calculamos el $\cos \alpha \rightarrow \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A \cdot B} = \frac{-13}{\sqrt{29} \sqrt{11}} = \frac{-13}{\sqrt{319}} = \frac{-13}{17,86}$$

$$\cos \alpha = -0,72788 \rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - (-0,72788)^2} = \sqrt{1 - 0,5298}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{0,470190} = 0,6857$$

$\sin \alpha = 0,6857$

c) Cosenos directores del vector $\vec{A}$ y el producto $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$. (1 punto).

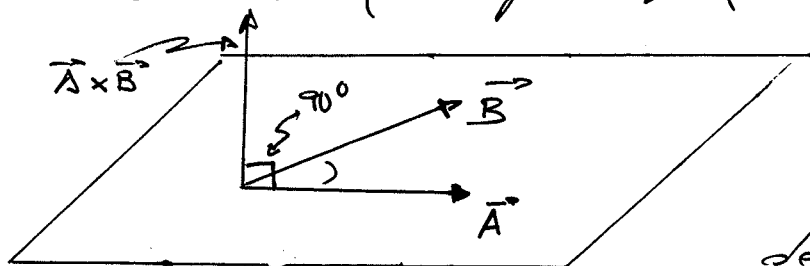
$$\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k} \rightarrow A_x = 2 \quad A_y = 3 \quad A_z = -4$$

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{A} = \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29} = 0,371$$

$$\cos \beta = \frac{A_y}{A} = \frac{3}{\sqrt{29}} = \frac{3\sqrt{29}}{29} = 0,577$$

$$\cos \gamma = \frac{A_z}{A} = \frac{-4}{\sqrt{29}} = \frac{-4\sqrt{29}}{29} = -0,743$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}) \cdot (5\vec{i} - 10\vec{j} - 5\vec{k}) = (10) - (30) + 20 = 0$$



el producto vectorial es $\perp$ a cualquiera de los dos vectores que se multiplican.

P.2. Una partícula describe una trayectoria en el plano dada por las ecuaciones paramétricas:

$$x = 1 + 2 \cos 2t \quad y = 5 + 2 \sin 2t$$

a) Calcula los vectores de posición, velocidad y aceleración para cualquier instante. (1 punto)

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = (1 + 2\cos 2t)\vec{i} + (5 + 2\sin 2t)\vec{j} \text{ m}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (-4\sin 2t)\vec{i} + (4\cos 2t)\vec{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = (-8\cos 2t)\vec{i} - (8\sin 2t)\vec{j} \text{ m/s}^2$$

b) Valor de los vectores anteriores en el instante $t = \pi \text{ s}$ (1 punto)

$$\vec{r}(\pi \text{ s}) = (1 + 2\cos 2\pi)\vec{i} + (5 + 2\sin 2\pi)\vec{j} \text{ m} = 3\vec{i} + 5\vec{j} \text{ m}$$

$$\vec{v}(\pi \text{ s}) = (-4\sin 2\pi)\vec{i} + (4\cos 2\pi)\vec{j} \text{ m/s} = 4\vec{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{a}(\pi \text{ s}) = (-8\cos 2\pi)\vec{i} - (8\sin 2\pi)\vec{j} \text{ m/s}^2 = -8\vec{i} \text{ m/s}^2$$

c) Calcula las aceleraciones tangencial y normal. (1 punto)

$$\begin{aligned} a_T &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{16\sin^2 2t + 16\cos^2 2t} \right) = \frac{d}{dt} \sqrt{16(\sin^2 2t + \cos^2 2t)} = \\ &= \frac{d}{dt} \sqrt{16} = \frac{d}{dt} 4 = 0 \quad \rightarrow \boxed{a_T = 0} \rightarrow \boxed{\vec{a}_T = \vec{0}} \end{aligned}$$

$$\text{Como } \vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N \rightarrow \vec{a}_N = \vec{a} = (-8\cos 2t)\vec{i} - (8\sin 2t)\vec{j} \text{ m/s}^2$$