

ORIENTACIONES: Comente sus planteamientos de tal modo que demuestre que entiende lo que hace. Tenga en cuenta que la extensión de sus respuestas está limitada por el tiempo y el papel de que dispone. Recuerde expresar todas las magnitudes físicas con sus unidades. Utilice el reverso de esta hoja para sucio, lo que escriba en ella no tendrá validez.

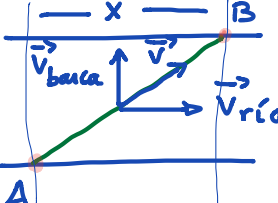
## TEORIA

T.1 (1 punto). Componentes intrínsecas de la aceleración.

T.2. (1 punto). Movimiento circular uniformemente acelerado (MCUA).

## CUESTIONES

C.1. (1 punto). Tengo una barca con motor que se desplaza con una velocidad de  $v_{barca} = 18 \text{ km/h}$ . Si el agua del río que quiero atravesar se mueve con una velocidad de  $v_{rio} = 2 \text{ m/s}$ , y la anchura del río es de  $1,5 \text{ km}$ . ¿Qué distancia (la diagonal) me desplazará la corriente del río desde mi punto de salida?



$V_{barca} = 18 \text{ km/h} = 5 \text{ m/s}$   
 $\vec{V} = V_{rio} \hat{i} + V_{barca} \hat{j} = 2 \hat{i} + 5 \hat{j} \text{ m/s}$   
 $x = V_{rio} t ; y = V_{barca} t \Rightarrow$   
 $\Rightarrow t = \frac{1500 \text{ m}}{5 \text{ m/s}} = 300 \text{ s} \Rightarrow x = 2 \text{ m/s} \cdot 300 \text{ s} = 600 \text{ m} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{600^2 + 1500^2} \approx 1615,55 \text{ m} \approx 1600 \text{ m}$   
 Si tomamos 2 c.s.  
 c.s. : Cifras significativas

C.2 Realiza los siguientes cambios de coordenadas:

a) (0,5 puntos). Pasa a coordenadas polares (4,8) m.

$r = \sqrt{x^2 + y^2} ; (x, y) = (4, 8) \text{ m} \Rightarrow r = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5} \text{ m} \approx 8,94 \text{ m} \approx 8,9 \text{ m}$   
 $\theta = \arctg \frac{y}{x} = \arctg \frac{8}{4} \approx 1,1 \text{ rad} \approx 63^\circ$   
 $(\pi \approx 3,14)$  Redondeo a 2 c.s.

b) (0,5 puntos). Pasa a coordenadas rectangulares (16 m,  $60^\circ$ ).

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \Rightarrow x = 16 \cos 60^\circ \text{ m} = 8 \text{ m}$   
 $y = 16 \sin 60^\circ \text{ m} \approx 13,86 \text{ m} \approx 14 \text{ m}$

## PROBLEMAS

P.1. Una partícula cargada se mueve en el espacio, su trayectoria en el tiempo queda determinada por el vector de posición

$$r = 2 \cos 2t \text{ i} + 2 \sin 2t \text{ j} + 2 t \text{ k} \text{ m.}$$

- a. (1 punto). Calcula el vector velocidad y aceleración instantánea; el vector desplazamiento, el vector velocidad media y aceleración media en el intervalo de tiempo  $t \in [0, \pi]$  s.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -4 \sin 2t \hat{i} + 4 \cos 2t \hat{j} + 2 \hat{k} \text{ m/s}; \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -8 \cos 2t \hat{i} - 8 \sin 2t \hat{j} \text{ m/s}^2$$

(Vector desplazamiento):  $\Delta \vec{r} = \vec{r}(\pi) - \vec{r}(0) = (2\hat{i} + 2\pi\hat{k}) - 2\hat{i} = 2\pi\hat{k} \text{ m} \approx 6,3 \hat{k} \text{ m}$   
 $\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{2\pi\hat{k}}{\pi} = 2\hat{k} \text{ m/s}; \vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{0}}{\pi} = \vec{0} \text{ m/s}^2$   
 $\Delta \vec{v} = \vec{v}(\pi) - \vec{v}(0) = (4\hat{j} + 2\hat{k}) - (4\hat{j} + 2\hat{k}) = \vec{0} \text{ m/s}$

- b. (1 punto). Obtener la ecuación de trayectoria (implícita) y su forma paramétrica en el plano XY. Y calcula el módulo  $|\vec{r} \times \vec{v}|$  en cualquier instante.

$x = 2 \cos 2t, y = 2 \sin 2t$  (Ecuaciones paramétricas del plano);  $x^2 = 4 \cos^2 2t, y^2 = 4 \sin^2 2t \Rightarrow x^2 + y^2 = 4(\cos^2 2t + \sin^2 2t) = 4$

la expresión explícita de la ec. de trayectoria es  $y = \pm \sqrt{4 - x^2}$  (Ecuación de trayectoria)

$$\vec{r} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 \cos 2t & 2 \sin 2t & 2t \\ -4 \sin 2t & 4 \cos 2t & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(4 \sin 2t - 8t \cos 2t) - \hat{j}(4 \cos 2t + 8t \sin 2t) + \hat{k}(8 \cos^2 2t + 8 \sin^2 2t) \frac{m^2}{s} = 4[\hat{i}(\sin 2t - 2t \cos 2t) - \hat{j}(\cos 2t + 2t \sin 2t) + 2\hat{k}] \frac{m^2}{s}$$

$$\Rightarrow |\vec{r} \times \vec{v}| = 4 \sqrt{4 + (\sin 2t - 2t \cos 2t)^2 + (\cos 2t + 2t \sin 2t)^2} = 4 \sqrt{4 + \sin^2 2t + 4t^2 \cos^2 2t - 4t \sin 2t \cos 2t + \cos^2 2t + 4t^2 \sin^2 2t + 4t \sin 2t \cos 2t} = 4 \sqrt{4 + 1 + 4t^2} = 4 \sqrt{5 + 4t^2} \frac{m^2}{s}$$

- c. (1 punto). Calcula el vector unitario tangencial ( $\hat{u}_t$ ), el vector aceleración tangencial, normal y el radio de curvatura en cualquier instante y en el instante  $t = \pi$  s.

$$\hat{u}_t = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{1}{\sqrt{5}} (-2 \sin 2t \hat{i} + 2 \cos 2t \hat{j} + \hat{k}); |\vec{v}| = \sqrt{4^2 \sin^2 2t + 4^2 \cos^2 2t + 4} \frac{m}{s} = \sqrt{20} \frac{m}{s} = 2\sqrt{5} \text{ m/s}$$

$$\vec{a}_t = a_t \hat{u}_t; a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0 \text{ m/s}^2; \vec{a} = \vec{a}_n = -8(\cos 2t \hat{i} + \sin 2t \hat{j}) \frac{m}{s^2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}; a_n = 8 \sqrt{\cos^2 2t + \sin^2 2t} \frac{m}{s^2} = 8 \frac{m}{s^2} \Rightarrow \rho = \frac{(2\sqrt{5})^2}{8} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ m}$$

Para cualquier instante

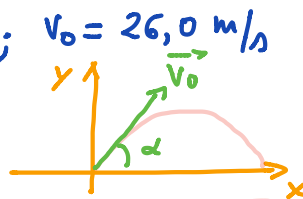
P.2 Se lanza un objeto esférico con una velocidad de 26,0 m/s formando un ángulo de 30° con la horizontal. Calcule:

a) (1 punto). Ecuaciones paramétricas del movimiento, ecuación de la trayectoria y ecuaciones de la velocidad.

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{Ecuaciones paramétricas} \quad ; \quad v_0 = 26,0 \text{ m/s} \quad (3 \text{ c.s.})$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - g t \quad \text{Ecuación de velocidades}$$

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \Rightarrow y = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g \left( \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) \Rightarrow y = x \tan \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \quad \text{Ecuación de trayectorias}$$



b) (1 punto). Alcance, altura máxima, tiempo de vuelo. Velocidad y su módulo en el momento del impacto.

$$(y=0) \Rightarrow 0 = (v_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} \quad (\text{Tiempo que se encuentra en el aire})$$

$$x = (v_0 \cos \alpha) t \Rightarrow x_{\text{máx}} = v_0 \cos \alpha \left( \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} \right) = \frac{2 v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\Rightarrow x_{\text{máx}} = \frac{26,0^2}{9,81} \sin 60^\circ \approx 59,7 \text{ m}$$

$$(y_{\text{máx}}); \quad v_y = 0 \text{ m/s} \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \Rightarrow y_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} \Rightarrow y_{\text{máx}} = \frac{1}{2g} v_0^2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{2 \cdot 9,81} \cdot (26,0)^2 \cdot \sin^2 30^\circ \approx 8,62 \text{ m}; \quad t = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2 \cdot 26,0 \cdot \sin 30^\circ}{9,81} \approx 2,65 \text{ s}$$

c) (1 punto). La velocidad con que debería haberse lanzado para alcanzar un agujero situado a 100 m.

$$\vec{v} = v_0 \cos \alpha \hat{i} + (v_0 \sin \alpha - g t) \hat{j} = 26,0 \cdot \cos 30^\circ \hat{i} + (26,0 \sin 30^\circ - 9,81 \cdot 2,65) \hat{j} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v} \approx 22,5 \hat{i} - 13,0 \hat{j} \text{ m/s};$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{22,5^2 + 13,0^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 26,0 \text{ m/s}$$

$$(x=100 \text{ m}) \quad x = t v_0 \cos \alpha$$

$$t = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} \quad (\text{tiempo en vuelo})$$

$$x = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} v_0 \cos \alpha \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{g x}{\sin 2\alpha}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 100}{\sin 60^\circ}} \approx 33,6 \text{ m/s}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Datos para todos los problemas y cuestiones:  $g=9,81 \text{ m/s}^2$