ORIENTACIONES: Comente sus planteamientos de tal modo que demuestre que entiende lo que hace. Tenga en cuenta que la extensión de sus respuestas está limitada por el tiempo y el papel de que dispone. Recuerde expresar todas las magnitudes físicas con sus unidades. Utilice el reverso de esta hoja para sucio, lo que escriba en ella no tendrá validez.

TEORIA

T.1 (1 punto). Producto escalar de vectores. Condición de perpendicularidad. Proyección de un vector sobre otro.

T.2. (1 punto). Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA).

CUESTIONES

C.1. (1 punto). Responde a las siguientes cuestiones: (a) Un cuerpo cambia su velocidad moviéndose siempre sobre una recta. ¿Qué tipo de aceleración lleva? (b) ¿Qué tipo de aceleración tendrían los planetas del sistema solar si suponemos que el valor del módulo de su velocidad permanece constante?

a) Al cambiar la velocidad sin cambiar la dirección y el sentido solo tendrá la $\vec{a}_T$. Si en algún momento cambiara también el sentido tendrá $\vec{a}_T$ y $\vec{a}_N$

b) En el caso de los planetas como solo cambia la direccion tendrá $\vec{a}_N$

C.2 (1 punto). Determina si son paralelos los vectores $\vec{A} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 5\vec{k}$ y $\vec{B} = 12\vec{\imath} + 18\vec{\jmath} + 30\vec{k}$.

Si $\vec{A} \parallel \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 12 & 18 & 30 \end{vmatrix} = (3\cdot 30 - 5\cdot 18)\vec{\imath} - (2\cdot 30 - 5\cdot 12)\vec{\jmath} + (2\cdot 18 - 3\cdot 12)\vec{k} =$$

$$= (90-90)\vec{\imath} - (60-60)\vec{\jmath} + (36-36)\vec{k} = \vec{0}$$

"SON PARALELOS"

PROBLEMAS

P.1. Una partícula cargada se mueve en el espacio, su trayectoria en el tiempo queda determinada por el vector de posición

$$\vec{r} = 2\cos 2t\ \vec{\imath} + (2\,t + 2\sin 2t)\ \vec{\jmath}\ \text{ m}.$$

a. (1 punto). Calcula el vector velocidad y aceleración instantánea; el vector desplazamiento, el vector velocidad media y aceleración media en el intervalo de tiempo $t \in [0, \pi/2]$ s.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[2\cos 2t\,\vec{\imath} + (2t + 2\sin 2t)\vec{\jmath}\ m\right] = -4\sin 2t\,\vec{\imath} + (2 + 4\cos 2t)\vec{\jmath}\ m/s$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-4\sin 2t\,\vec{\imath} + (2 + 4\cos 2t)\vec{\jmath}\ m/s\right] = -8\cos 2t\,\vec{\imath} - 8\sin 2t\,\vec{\jmath}\ m/s^2$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(\pi/2) - \vec{r}(0) = -4\vec{\imath} + \pi\vec{\jmath}\ m$$

$$\vec{v}_M = \frac{\vec{r}(\pi/2)-\vec{r}(0)}{\Delta t} = \frac{\left[2\cos\overset{-1}{\pi}\,\vec{i} + (\pi + 2\,\mathrm{sen}\overset{0}{(\pi)})\vec{j}\right] - \left[2\cos\overset{1}{0}\,\vec{i} + (0 + 2\,\mathrm{sen}\overset{0}{0})\vec{j}\right]}{\pi/2\ s}\, m$$

$$\vec{v}_M = \frac{-2\vec{i}+\pi\vec{j}-2\vec{i}}{\pi/2}\, m/s \qquad \boxed{\vec{v}_M = \frac{2}{\pi}\left(-4\vec{i}+\pi\vec{j}\right) m/s = -\frac{8}{\pi}\vec{i} + 2\vec{j}\ m/s}$$

$$\vec{a}_M = \frac{\vec{V}(\pi/2) - \vec{V}(0)}{\Delta t} = \frac{\left[-4\,\mathrm{sen}\overset{0}{\pi}\,\vec{i} + (2 + 4\underset{-1}{\cos(\pi)})\vec{j}\right] - \left[-4\,\underset{0}{\mathrm{sen}\,0}\,\vec{i} + (2+4\underset{1}{\cos(0)})\vec{j}\right]}{\pi/2\ s}$$

$$\vec{a}_M = \frac{2}{\pi}\left(2\vec{j}-6\vec{j}\right) m/s^2 \qquad \boxed{\vec{a}_M = \frac{-16}{\pi}\vec{j}\ m/s^2}$$

b. **(1 punto).** Obtener las ecuaciones paramétricas. Y calcula el módulo $\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{a})$ en el instante $t = \frac{\pi}{2}$ s.

ECUACIONES PARAMÉTRICAS

$$\begin{cases} x = 2\cos 2t\ m \\ y = 2t + 2\,\mathrm{sen}\,2t\ m \end{cases}$$

$$\vec{V}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = -2\vec{j}\ m/s \qquad \vec{a}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 8\vec{i}\ m/s^2 \qquad \vec{v}\wedge\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2\,m/s & 0 \\ 8\,m/s^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 16\vec{k}\ m^2/s^3$$

$$\vec{r}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{a}) = \left(-2\vec{i}+\pi\vec{j}\right) m \cdot \left(16\vec{k}\right) m^2/s^3 = 0 \ \rightarrow\ \left|\vec{r}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{a})\right| = 0$$

c. **(1 punto).** Calcula el vector unitario tangencial ($\vec{u}_t$), el vector aceleración tangencial, normal y el radio de curvatura en cualquier instante y en el instante $t = \pi/2$ s.

Como $\vec{V} = v\,\vec{u}_T \rightarrow \vec{u}_T = \frac{\vec{V}}{V} = \frac{-4\,\mathrm{sen}\,2t\,\vec{i} + (2+4\cos 2t)\vec{j}\ m/s}{\sqrt{\underbrace{16\,\mathrm{sen}^2 2t + 16\cos^2 2t}_{16} + 4 + 16\cos 2t}}$

$$\vec{u}_T(\pi/2\,s) = \frac{-2\vec{j}\ m/s}{2\ m/s} = -\vec{j}$$

$$\vec{a}_T = a_T\,\vec{u}_T \qquad a_T = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sqrt{20+16\cos 2t}\right] = \frac{-2\cdot 16\,\mathrm{sen}\,2t}{2\sqrt{20+16\cos 2t}}$$

$$\vec{a}_T = \frac{-16\cdot\mathrm{sen}\,2t}{2\sqrt{5+4\cos 2t}}\left(-\vec{j}\right) = \frac{8\,\mathrm{sen}\,2t}{\sqrt{5+4\cos 2t}}\,\vec{j}$$

$$\vec{a}_T(\pi/2\,s) = \frac{8\,\mathrm{sen}\overset{0}{\pi}}{\sqrt{5+\cos\pi}}\,\vec{j} = \vec{0} \qquad \vec{a}_N = \vec{a}-\vec{a}_T = -8\cos 2t\,\vec{i} - 8\,\mathrm{sen}\,2t\,\vec{j} - \frac{8\,\mathrm{sen}\,2t}{\sqrt{5+4\cos 2t}}\,\vec{j}$$

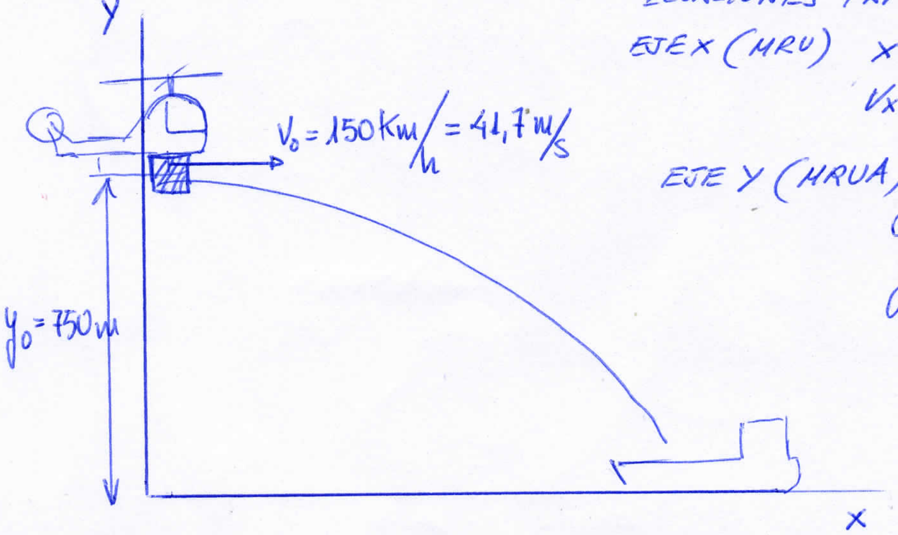
$$\vec{a}_N = -8\cos 2t\,\vec{i} - \left(8\,\mathrm{sen}\,2t + \frac{8\,\mathrm{sen}\,2t}{\sqrt{5+4\cos 2t}}\right)\vec{j} = -8\cos 2t\,\vec{i} - \left(\frac{8\,\mathrm{sen}\,2t\sqrt{5+4\cos 2t} + 8\,\mathrm{sen}\,2t}{\sqrt{5+4\cos 2t}}\right)\vec{j}$$

$$\vec{a}_N(\pi/2\,s) = 8\vec{i} - \frac{0}{\sqrt{1}}\,\vec{j}\ m/s^2 \qquad \vec{a}_N(\pi/2\,s) = 8\vec{i}\ m/s^2$$

RADIO DE CURVATURA AL FINAL

P.2. Un helicóptero de salvamento debe dejar caer un paquete con víveres sobre un barco que se encuentra en reposo. El helicóptero vuela con una velocidad constante de 150 km/h y una altura de 750 m. Desprecie el rozamiento con el aire. g=9,81 m/s^2. Calcule:

a. (1 punto). Elija un sistema de referencia y escriba las ecuaciones paramétricas del movimiento de los víveres durante la caída. Escriba las ecuaciones de la velocidad en cada eje.



ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y DE VELOCIDAD

EJE X (MRU) $x = V_x \cdot t = (41,7\ m/s) \cdot t$

$V_x = V_0 = 41,7\ m/s$

EJE Y (MRUA) $y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2 = 750\ m - 4,90\ m/s^2\ t^2$

$V_y = -gt = -9,81\ m/s^2\ t$

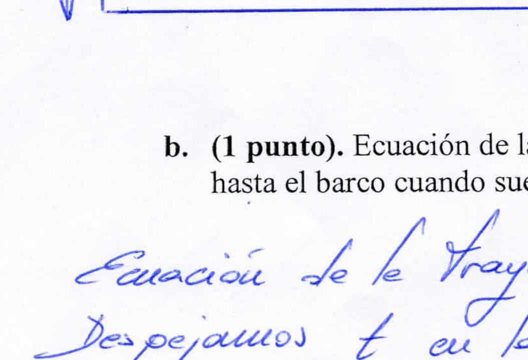
b. (1 punto). Ecuación de la trayectoria. ¿Cuál es la distancia en línea recta desde el helicóptero hasta el barco cuando suelta la carga?

Ecuación de la trayectoria $y = f(x)$

Despejamos t en la ecuación de $x(t)$ $\quad t = \frac{x}{41,7\ m/s} \quad t^2 = \frac{x^2}{1739\ m^2/s^2}$

Sustituimos en la ecuación de y

$y = 750\ m - 4,90\ m/s^2 \frac{x^2}{1739\ m^2/s^2}$; $\boxed{y = 750\ m - 2,82 \cdot 10^{-3}\ m^{-1} x^2}$



$d = \sqrt{x^2 + y^2}$ debemos conocer el tiempo de caída

Cuando cae $y = 0 \rightarrow 0 = 750\ m - 4,90\ m/s^2\ t^2$

$t = \sqrt{\frac{750}{4,90}}\ s = 12,4\ s$ $\quad \begin{cases} x = 41,7\ m/s \cdot 12,4\ s = 517\ m \\ y = 750\ m \end{cases}$

$d = \sqrt{(517\ m)^2 + (750\ m)^2} = 911\ m$ $\quad \boxed{d = 911\ m}$

c. (1 punto). ¿Cuánto tiempo han tardado en llegar los víveres al barco? ¿Qué velocidad lleva la carga cuando llega al barco?

Ese tiempo se ha calculado en b) $\boxed{t = 12{,}4\,s}$

$V_x = 41{,}7\ m/s$

$V_y = -9{,}81\ m/s^2 \cdot 12{,}4\,s = -122\ m/s$

$\vec{v} = 41{,}7\,\vec{i} - 122\,\vec{j}\ m/s$

Su módulo

$$\boxed{V = \sqrt{41{,}7^2 + (-122^2)}\ m/s = 129\ m/s}$$

Datos para todos los problemas y cuestiones: g=9,81 m/s²

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} \qquad \rho = \frac{v^2}{a_N} = \frac{20 + 16\cos 2t}{\sqrt{64\cos^2 2t + \dfrac{64\,\text{sen}^2 2t\,(\sqrt{5+4\cos 2t} + 1)^2}{(5+4\cos 2t)}}}$$

$$\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{20 + 16\cos\pi \ \ m^2/s^2}{\sqrt{64\cos^2\pi + \dfrac{64\,\text{sen}^2\pi\,(\sqrt{5+4\cos\pi} + 1)^2}{5+4\cos\pi}}\ \ m/s^2}$$

$$\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\sqrt{64}}\ m = \frac{4}{8}\ m = \underline{\underline{0{,}5\,m}}$$