

TEORIA

T.1 Producto escalar de vectores. Condición de perpendicularidad y ángulo entre vectores. (1 punto)

T.2 Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA). Ecuaciones y gráficas de la aceleración, velocidad y espacio frente al tiempo. (1 punto)

CUESTIONES

C.1 Las coordenadas rectangulares de un punto son (3,2)m. Obtenga sus coordenadas polares (r, θ): (1 punto)

$$(x, y) \rightarrow (r, \theta)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3\text{m})^2 + (2\text{m})^2} = \sqrt{9\text{m}^2 + 4\text{m}^2} = \sqrt{13\text{m}^2} = \sqrt{13}\text{m}$$

$$\theta = \arctg \frac{y}{x} = \arctg \frac{2}{3} = 33,7^\circ$$

$$(r, \theta) = (\sqrt{13}\text{m}, 33,7^\circ)$$

C.2. Dados los vectores $\vec{A} = -5\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ y $\vec{B} = -6\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ calcule su producto vectorial (1 punto).

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 4 & 5 \\ -6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (16 - 10)\vec{i} - (-20 + 30)\vec{j} + (-10 + 24)\vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = 6\vec{i} - 10\vec{j} + 14\vec{k}$$

PROBLEMAS

P.1. El movimiento de una partícula viene dado por el vector posición $\vec{r}(t) = (5t^2 + 4t)\vec{i} + (3t^3)\vec{j} + 6\vec{k}$ m encuentre:

a) Vector velocidad en función de t, su módulo y el valor de ambos a los 5 s. (1 punto).

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} [(5t^2 + 4t)\vec{i} + (3t^3)\vec{j} + 6\vec{k}] \text{ m/s} = (10t + 4)\vec{i} + (9t^2)\vec{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{v}(5\text{s}) = 54\vec{i} + 225\vec{j} \text{ m/s}$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{(10t + 4)^2 + (9t^2)^2} \text{ m/s} = \sqrt{100t^2 + 80t + 16 + 81t^4} \text{ m/s} \quad v(5\text{s}) = \sqrt{2500 + 400 + 16 + 50625} \text{ m/s} = 231,4 \text{ m/s}$$

b) Vector aceleración en función de t, su módulo y el valor de ambos a los 5 s. (1 punto).

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} [(10t + 4)\vec{i} + (9t^2)\vec{j}] \text{ m/s}^2 = 10\vec{i} + 18t\vec{j} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}(5\text{s}) = 10\vec{i} + 90\vec{j} \text{ m/s}^2$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{10^2 + (18t)^2} \text{ m/s}^2 = \sqrt{100 + 324t^2} \text{ m/s}^2 \quad a(5\text{s}) = \sqrt{100 + 324 \cdot 25} \text{ m/s}^2 = 90,6 \text{ m/s}^2$$

c) Módulos de la aceleración tangencial y normal a los 4 s. (1 punto).

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{81t^4 + 100t^2 + 80t + 16} = \frac{324t^3 + 200t + 80}{2\sqrt{81t^4 + 100t^2 + 80t + 16}}; \quad a_T(4\text{s}) = \frac{21616}{2\sqrt{22672}} \text{ m/s}^2 = \frac{10808}{150,6} \text{ m/s}^2$$

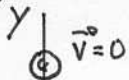
$$a_T(4\text{s}) = 71,8 \text{ m/s}^2 \quad a(4\text{s}) = \sqrt{100 + 5184} \text{ m/s}^2 = \sqrt{5284} \text{ m/s}^2 = 72,69 \text{ m/s}^2$$

$$\text{SE CUMPLE } a^2 = a_T^2 + a_N^2 \rightarrow a_N^2 = a^2 - a_T^2 = 5284 \text{ m/s}^2 - 5155,2 \text{ m/s}^2 = 128,76 \text{ m/s}^2$$

$$a_N(4\text{s}) = 11,35 \text{ m/s}^2$$

P.2. Se lanza verticalmente hacia arriba un objeto con una velocidad tal que alcanza una altura máxima de 1000m. Determine:

a) Velocidad con que se ha lanzado (1 punto)



EL OBJETO REALIZA UN MRUA CON $a = -g = -9,8 \text{ m/s}^2$

$$v = v_0 - gt \rightarrow v = v_0 - 9,8 \text{ m/s}^2 t$$

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow y = v_0 t - 4,9 \text{ m/s}^2 t^2$$

CUANDO ALCANZA LOS 1000m SU VELOCIDAD ES CERO

$$0 = v_0 - 9,8 \text{ m/s}^2 t \rightarrow v_0 = 9,8 \text{ m/s}^2 t$$

$$1000 \text{ m} = 9,8 \text{ m/s}^2 t^2 - 4,9 \text{ m/s}^2 t^2 = 4,9 \text{ m/s}^2 t^2 \rightarrow t^2 = \frac{1000 \text{ m}}{4,9 \text{ m/s}^2} = 204,08 \text{ s}^2 \rightarrow t = 14,3$$

LUEGO $v_0 = 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 14,35 = 140,1 \text{ m/s}$

$$\boxed{v_0 = 140,1 \text{ m/s}}$$

b) Elija un sistema de referencia y escriba las ecuaciones de $\vec{a}$, $\vec{v}$ y $\vec{r}$ (1 punto).

EL SISTEMA ES EL ESCOGIDO EN a)

$$\vec{a} = -g \vec{j} = -9,8 \vec{j} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{v} = (v_0 - gt) \vec{j} = (140,1 \text{ m/s} - 9,8 \text{ m/s}^2 t) \vec{j}$$

$$\vec{r} = (140,1 \text{ m/s} t - 4,9 \text{ m/s}^2 t^2) \vec{j}$$

c) Vectores velocidad y posición a los 10s. (1 punto)

$$\vec{v}(10\text{s}) = (140,1 \text{ m/s} - 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 10\text{s}) \vec{j} = (140,1 - 98) \vec{j} \text{ m/s} = 42,1 \vec{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{r}(10\text{s}) = (140,1 \text{ m/s} \cdot 10\text{s} - 4,9 \text{ m/s}^2 \cdot 100\text{s}^2) \vec{j} = (1401 - 490) \vec{j} \text{ m} = 911 \vec{j} \text{ m}$$

TEORIA

T.1 Producto vectorial de vectores. Condición de paralelismo. (1 punto)

T.2 Movimiento rectilíneo uniforme (MRU). Ecuaciones y gráficas de la aceleración, velocidad y espacio frente al tiempo (1 punto)

CUESTIONES

C.1. Dados los vectores $\vec{A} = -5\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ y $\vec{B} = -6\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ calcule el ángulo que forman (1 punto)

CÁLCULEMOS EL PRODUCTO ESCALAR DE AMBOS VECTORES $\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos \alpha$

$$\text{LUEGO } \cos \alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A \cdot B} = \frac{(-5)(-6) + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4}{\sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 5^2} \sqrt{(-6)^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{30 + 8 + 20}{\sqrt{66} \sqrt{56}} = \frac{58}{\sqrt{3696}}$$

$$\cos \alpha = \frac{58 \cdot \sqrt{3696}}{3696} = \frac{3526,09}{3696} = 0,9540 \rightarrow \alpha = \arccos 0,9540 = 17,44^\circ$$

$$\boxed{\alpha = 17,44^\circ}$$

C.2. Dadas las coordenadas polares de un punto (100m, 30°), calcule sus coordenadas rectangulares (x,y): (1 punto).

$$(r, \theta) \rightarrow (x, y)$$

$$x = r \cos \theta = 100 \text{ m} \cos 30^\circ = 100 \text{ m} \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \text{ m}$$

$$y = r \sin \theta = 100 \text{ m} \sin 30^\circ = 100 \text{ m} \frac{1}{2} = 50 \text{ m}$$

$$(x, y) = (50\sqrt{3}, 50) \text{ m}$$

PROBLEMAS

P.1 El movimiento de una partícula viene dado por el vector posición $\vec{r}(t) = (4t^2 + t)\vec{i} + (2t^3)\vec{j} + 4\vec{k}$ m encuentre:

a) Velocidad media en los 2 primeros segundos. (1 punto).

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(2s) - \vec{r}(0s)}{\Delta t} = \frac{(18\vec{i} + 16\vec{j} + 4\vec{k}) \text{ m} - (4\vec{k}) \text{ m}}{2s} = \frac{18\vec{i} + 16\vec{j} \text{ m}}{2s} = 9\vec{i} + 8\vec{j} \text{ m/s}$$

$$\boxed{\vec{v}_m = 9\vec{i} + 8\vec{j} \text{ m/s}}$$

b) Producto escalar de $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$ (1 punto).

$$\vec{v} = (8t + 1)\vec{i} + (6t^2)\vec{j} \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{v} &= [(4t^2 + t)\vec{i} + (2t^3)\vec{j} + 4\vec{k} \text{ m}] \cdot [(8t + 1)\vec{i} + (6t^2)\vec{j} \text{ m/s}] = \\ &= (4t^2 + t)(8t + 1) + (2t^3)(6t^2) \text{ m}^2/\text{s} = 32t^3 + 8t^2 + 4t^2 + t + 12t^5 \text{ m}^2/\text{s} = 12t^5 + 32t^3 + 12t^2 + t \text{ m}^2/\text{s} \end{aligned}$$

c) Aceleración media en los 2 primeros segundos. (1 punto).

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(2s) - \vec{v}(0s)}{\Delta t} = \frac{(17\vec{i} + 24\vec{j} \text{ m/s}) - \vec{i} \text{ m/s}}{2s} = \frac{16\vec{i} + 24\vec{j} \text{ m/s}}{2s}$$

$$\boxed{\vec{a}_m = 8\vec{i} + 12\vec{j} \text{ m/s}^2}$$

P.2 Dados los vectores $\vec{A} = 5\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$ y $\vec{B} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ calcule

a) Módulo y cosenos directores de ambos vectores. (1 punto).

$$|\vec{A}| = \sqrt{25 + 36 + 9} = \sqrt{70}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{A} = \frac{5}{\sqrt{70}} = \frac{5\sqrt{70}}{70} = \frac{\sqrt{70}}{14}$$

$$\cos \beta = \frac{A_y}{A} = \frac{-6}{\sqrt{70}} = \frac{-6\sqrt{70}}{70} ; \cos \gamma = \frac{A_z}{A} = \frac{3}{\sqrt{70}} = \frac{3\sqrt{70}}{70}$$

$$\cos \alpha = \frac{B_x}{B} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$\cos \beta = \frac{B_y}{B} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\cos \gamma = \frac{B_z}{B} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

b) $\vec{A} + \vec{B}$; $\vec{B} - \vec{A}$; $\vec{A} \cdot \vec{B}$ (1 punto).

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$\vec{B} - \vec{A} = -9\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (5\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (-4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}) = -20 - 12 + 12 = -20$$

c) Producto vectorial de ambos $\vec{A} \wedge \vec{B}$ y módulo de dicho producto $|\vec{A} \wedge \vec{B}|$ (1 punto).

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-24 - 6)\vec{i} - (20 + 12)\vec{j} + (10 - 24)\vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -30\vec{i} - 32\vec{j} - 14\vec{k}$$

$$|\vec{A} \wedge \vec{B}| = \sqrt{(-30)^2 + (-32)^2 + (-14)^2} = \sqrt{900 + 1024 + 196} = 46,04$$