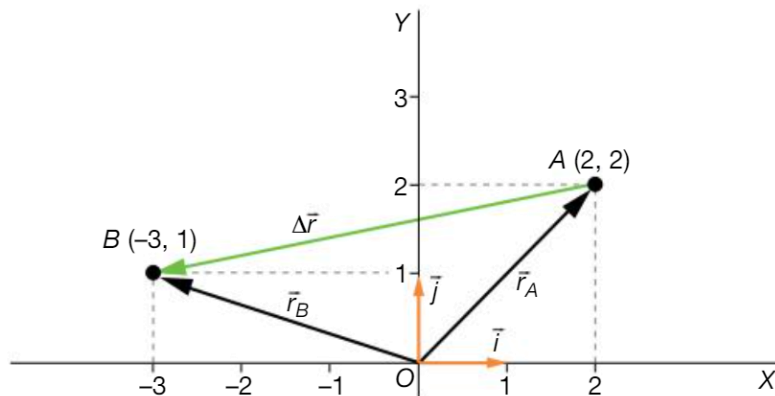


CINEMÁTICA

Posición y desplazamiento

- Una partícula se desplaza desde el punto $A(2,2)m$ hasta $B(-3,1)m$. Representa los vectores posición en A y B, y el vector desplazamiento. Exprésalos en componentes cartesianas.



Vectores posición :

para cada componente (x,y)

$$\vec{r}_A = \vec{OA} = \left\{ \begin{array}{l} \text{punto} \\ \text{final} \end{array} - \begin{array}{l} \text{punto} \\ \text{inicial} \end{array} \right\} =$$

$$= (x_A - x_0)\hat{i} + (y_A - y_0)\hat{j} = 2\hat{i} + 2\hat{j} \text{ (m)}$$

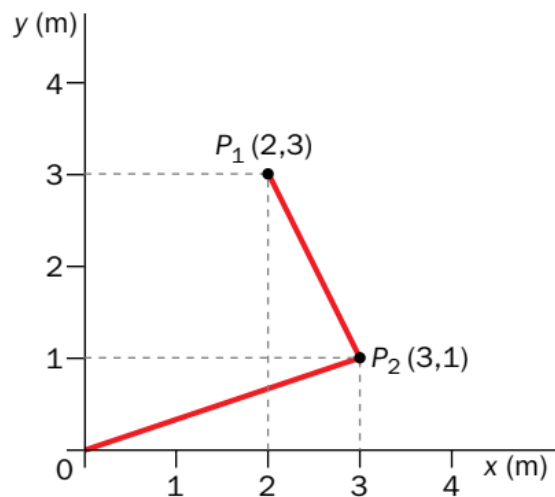
$$\vec{r}_B = \vec{OB} = (x_B - x_0)\hat{i} + (y_B - y_0)\hat{j} = -3\hat{i} + \hat{j} \text{ (m)}$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r} &= \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\hat{j} = \\ &= (-3 - 2)\hat{i} + (1 - 2)\hat{j} = -5\hat{i} - \hat{j} \text{ (m)} \end{aligned}$$

- Un móvil se encuentra en las coordenadas $x = 2m$, $y = 3m$. Se desplaza $1m$ en el sentido positivo del eje X y $2m$ en el sentido negativo del eje Y. ¿Cuál será ahora su vector posición? ¿A qué distancia se encuentra del origen? ¿Y del punto de partida?

$$\begin{array}{l} \text{Eje X} \longrightarrow x = 2 + 1 = 3m \\ \text{Eje Y} \longrightarrow y = 3 - 2 = 1m \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Vector de posición : } \vec{r} = 3\hat{i} + \hat{j} \text{ (m)} \end{array} \right.$$

Representamos en un diagrama el vector posición y el punto de partida:



La distancia al origen, en cualquier punto, es el módulo del vector posición.

Distancia : $d = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$

Del origen al punto (3,1) :

$$d_1 = \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10} \text{ cm}$$

Del punto (2,3) al punto (3,1) :

$$d_2 = \sqrt{(3-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{5} \text{ cm}$$

3. El vector posición de una partícula, en un momento determinado, es $\vec{r} = (-2\hat{i} + 2\hat{j})m$. Sabemos que el vector desplazamiento, respecto de una posición anterior, es $\Delta\vec{r} = (-4\hat{i} + 3\hat{j})m$. ¿En qué punto se encontraba?

$$\vec{r}_1 = -2\hat{i} + 2\hat{j} \text{ (m)}$$

$$\Delta\vec{r} = -4\hat{i} + 3\hat{j} \text{ (m)}$$

Por definición :

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = (-2\hat{i} + 2\hat{j}) - (x_0\hat{i} + y_0\hat{j}) = -4\hat{i} + 3\hat{j}$$

$$\begin{cases} -2 - x_0 = -4 & ; & x_0 = 2 \\ 2 - y_0 = 3 & ; & y_0 = -1 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_0 = 2\hat{i} - \hat{j} \\ \text{(m)} \end{array} \right.$$

PUNTO VECTOR POSICIÓN

Trayectoria y espacio recorrido

4. Determina la ecuación de la trayectoria descrita por un móvil cuyo vector posición viene dado por: $\vec{r} = [2t\hat{i} + (4t + 1)\hat{j}]m$.

$$\vec{r} = [2t\hat{i} + (4t+1)\hat{j}] \text{ (m)}$$

Ecuaciones paramétricas de la trayectoria: $x(t) = 2t$
 $y(t) = 4t+1$

Ecuación de la trayectoria:

Despejo 't' de alguna ecuación y sustituyo en la otra:

$$t = \frac{x}{2} \rightarrow y = 4 \cdot \frac{x}{2} + 1 \rightarrow y = 2x + 1$$

Ecuación de una recta
 $\Rightarrow$ Trayectoria rectilínea

Velocidad

5. Estudia el movimiento del cuerpo del ejercicio 4 entre $t_1 = 2s$ y $t_2 = 5s$.

Tengo el vector de posición: $\vec{r} = 2t\hat{i} + (4t+1)\hat{j}$ (m)

Y la ecuación de la trayectoria: $y = 2x + 1$

Ahora estudio la velocidad entre esos tiempos $t_1 = 2s$ y $t_2 = 5s$.

Velocidad media:

$$\vec{r}_1(t_1) = \vec{r}_1(2s) = 2 \cdot 2\hat{i} + (4 \cdot 2 + 1)\hat{j} = 4\hat{i} + 9\hat{j}$$

$$\vec{r}_2(t_2) = \vec{r}_2(5s) = 2 \cdot 5\hat{i} + (4 \cdot 5 + 1)\hat{j} = 10\hat{i} + 21\hat{j}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{r} = \vec{r}_2(t_2) - \vec{r}_1(t_1) = (10 - 4)\hat{i} + (21 - 9)\hat{j} = 6\hat{i} + 12\hat{j}$$

$$\Rightarrow \Delta t = t_2 - t_1 = 5 - 2 = 3s$$

$$\Rightarrow \vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{6\hat{i} + 12\hat{j}}{3} = 2\hat{i} + 4\hat{j} \quad \text{Módulo: } |v_m| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \text{ (m/s)}$$

Velocidad instantánea:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\hat{i} + 4\hat{j} \quad \text{Módulo: } |\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \text{ (m/s)}$$

La velocidad instantánea no depende del tiempo y coincide, en cada instante, con el vector velocidad media.

6. La ecuación del movimiento de una partícula viene dada por $\vec{r} = [(t-2)\hat{i} + (3t^2+1)\hat{j}]$, en el SI. Realiza un estudio del movimiento entre $t_1 = 3s$ y $t_2 = 10s$.

$$\vec{r} = [(t-2)\hat{i} + (3t^2+1)\hat{j}] \text{ (m)}$$

Ecuaciones paramétricas de la trayectoria: $x(t) = t-2$
 $y(t) = 3t^2+1$

Equación de la trayectoria:

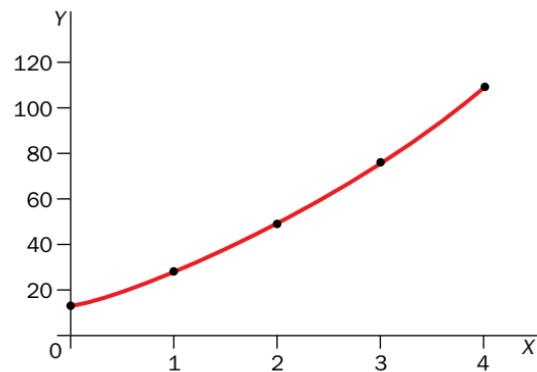
Despejo 't' de alguna ecuación y sustituyo en la otra:

$$t = x + 2 \rightarrow y = 3(x+2)^2 + 1 = 3(x^2 + 4 + 4x) + 1 = 3x^2 + 12x + 13$$

Ecuación de una parábola

La gráfica que obtenemos al representarla es la siguiente:

x	0	1	2	3	4
y	13	28	49	76	109



Ahora estudio la velocidad entre esos tiempos $t_1 = 3s$ y $t_2 = 10s$.

Velocidad media:

$$\vec{r}_1(t_1) = \vec{r}_1(3s) = (3-2)\hat{i} + (3 \cdot 3^2 + 1)\hat{j} = \hat{i} + 28\hat{j}$$

$$\vec{r}_2(t_2) = \vec{r}_2(10s) = (10-2)\hat{i} + (3 \cdot 10^2 + 1)\hat{j} = 8\hat{i} + 301\hat{j}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{r} = \vec{r}_2(t_2) - \vec{r}_1(t_1) = (8-1)\hat{i} + (301-28)\hat{j} = 7\hat{i} + 273\hat{j}$$

$$\Rightarrow \Delta t = t_2 - t_1 = 10 - 3 = 7s$$

$$\Rightarrow \vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{7\hat{i} + 273\hat{j}}{7} = \hat{i} + 39\hat{j}$$

Módulo:
 $|\vec{v}_m| = \sqrt{1^2 + 39^2} = 39,01 \text{ (m/s)}$

Velocidad instantánea:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i} + 6t\hat{j} \text{ (m/s)}$$

La velocidad instantánea depende del tiempo, es diferente a la velocidad media.

7. En los textos se suele decir que la celeridad media (c_m) es mayor o igual que el módulo de la velocidad media (v_m). ¿En qué casos coinciden? Describe un movimiento en el que $c_m \neq 0$ y $\vec{v}_m \neq 0$.

La celeridad media es el cociente entre el espacio recorrido (el espacio que seguimos en una trayectoria) y el tiempo que se tarda en recorrerlo, mientras que la velocidad media es la variación de los vectores posición con respecto al tiempo. Por tanto, la celeridad media siempre será mayor o igual que la velocidad media. Solo coincidirán en los casos que sea un movimiento rectilíneo uniforme, sin cambio de sentido. El

único caso en el que $\vec{v}_m$ se anula es aquel en el que la posición inicial coincide con la final, pues $\Delta \vec{r} = 0$, y así $\vec{v}_m = 0$. Por ejemplo, en un movimiento circular uniforme:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t} \rightarrow \text{Si } \vec{r}_2 = \vec{r}_1 \rightarrow \vec{v}_m = \frac{0}{\Delta t} = 0$$

$$s_2 - s_1 = 2\pi r$$

Aceleración

8. El vector posición de un móvil viene dado por $\vec{r} = [2t\hat{i} + (16t^2 + 1)\hat{j}]m$. Estudia la aceleración en los 5 primeros segundos.

Vector posición: $\vec{r}(t) = 2t\hat{i} + (16t^2 + 1)\hat{j}$

Velocidad instantánea:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\hat{i} + 32t\hat{j} \quad (m/s)$$

Aceleración media entre $t_1 = 0s$ y $t_2 = 5s$:

$$\vec{v}_1(t_1) = \vec{v}_1(0s) = 2\hat{i} + 32 \cdot 0\hat{j} = 2\hat{i}$$

$$\vec{v}_2(t_2) = \vec{v}_2(5s) = 2\hat{i} + 32 \cdot 5\hat{j} = 2\hat{i} + 160\hat{j}$$

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2(t_2) - \vec{v}_1(t_1) = 0\hat{i} + 160\hat{j} = 160\hat{j}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 5 - 0 = 5s$$

$$\Rightarrow \vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{160\hat{j}}{5} = 32\hat{j} \quad (m/s^2); \quad \text{Módulo: } |\vec{a}_m| = \sqrt{32^2} = 32$$

Aceleración instantánea:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 32\hat{j}; \quad |\vec{a}| = \sqrt{32^2} = 32 \quad (m/s^2) \quad \text{Coincide en cada instante con la vel. media}$$

9. Desde un punto de vista cinemático, ¿cuántos aceleradores tiene un vehículo? Razona tu respuesta.

En un coche hay tres aceleradores: el «acelerador», que aumenta la celeridad, el «freno», que la disminuye, y el «volante», que modifica la dirección del vector velocidad.

10. El vector posición de un móvil viene dado por $\vec{r} = [3\cos(5t)\hat{i} + 3\sin(5t)\hat{j}]m$. Calcula las componentes de la aceleración, cartesianas e intrínsecas. Represéntalas, junto al vector posición y el vector velocidad, en dos puntos que tú elijas de la trayectoria.

Vector posición: $\vec{r}(t) = 3 \cos(5t) \hat{i} + 3 \sin(5t) \hat{j}$ (m)

Velocidad instantánea:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 3(-\sin(5t)) \cdot 5 \hat{i} + 3 \cdot \cos(5t) \cdot 5 \hat{j} = -15 \sin(5t) \hat{i} + 15 \cos(5t) \hat{j}$$

Aceleración instantánea:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -15 \cos(5t) \cdot 5 \hat{i} + 15 \cdot (-\sin(5t)) \cdot 5 \hat{j} = -75 \cos(5t) \hat{i} - 75 \sin(5t) \hat{j}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-75 \cos(5t))^2 + (-75 \sin(5t))^2} = \sqrt{75^2 (\underbrace{\cos^2(5t) + \sin^2(5t)}_1)} = 75 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

Componentes intrínsecas:

$$\bullet a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

$$\text{Busco } |\vec{v}|: |\vec{v}| = \sqrt{(15 \sin(5t))^2 + (15 \cos(5t))^2} = \text{saco factor común} \\ = \sqrt{15^2 (\underbrace{\sin^2(5t) + \cos^2(5t)}_1)} = 15 \text{ (m/s)}$$

$$\Rightarrow a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0 \quad \text{se trata de un MOVIMIENTO UNIFORME}$$

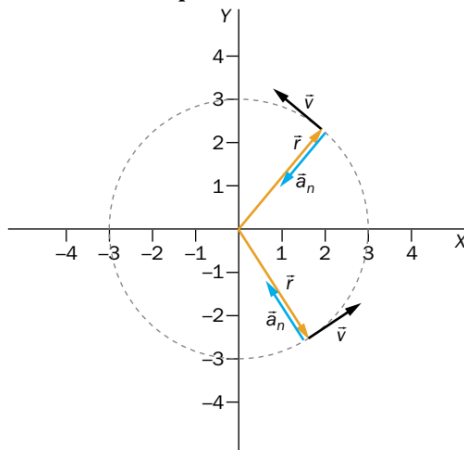
$$\bullet a_n = \frac{|\vec{v}|^2}{R} = \frac{15^2}{R} ?$$

Como me falta 'R', saco a_n del módulo de la aceleración (calculado arriba):

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{0 + a_n^2} = a_n = 75 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$* \text{ Así podría sacar } R: a_n = 75 = \frac{15^2}{R} \rightarrow R = 3 \text{ (m)}$$

La trayectoria del movimiento es una circunferencia. Si representamos el vector posición y el vector velocidad en dos puntos, obtenemos:



11. Identifica en tu entorno dos movimientos de cada uno de los tipos presentados en la tabla siguiente:

Movimiento	$a_t = 0$	$a_t = \text{cte} \neq 0$	$a_t \neq \text{cte}$
$a_n = 0$	Rectilíneo uniforme	Rectilíneo uniformemente acelerado	Rectilíneo acelerado
$a_n > 0$ $\rho = \text{cte}$	Circular uniforme	Circular uniformemente acelerado	Circular acelerado
$a_n > 0$ $\rho \neq \text{cte}$	Curvilíneo uniforme	Curvilíneo uniformemente acelerado	Curvilíneo acelerado

Movimiento	Ejemplo	Sistema de referencia
Rectilíneo uniforme	Una moto a $v = \text{cte}$	Un observador que la ve pasar
	El vuelo de un avión	Un observador desde tierra
Rectilíneo uniformemente acelerado	Un tren que sale de la estación	Un observador que lo ve pasar
	Un avión despegando	Un observador desde tierra
Rectilíneo acelerado	Un coche que adelanta a otro	El coche que adelanta
	Un coche en un atasco en una calle recta	Un observador desde fuera
Circular uniforme	Las manillas de un reloj analógico	Un observador que mira la hora
	La noria de la feria (una vez que ha arrancado)	Un observador quieto desde el suelo
Circular uniformemente acelerado	Las aspas de un helicóptero al salir	El piloto
	Una noria de la feria al arrancar	Un observador desde fuera
Circular acelerado	Las aspas de un helicóptero al salir	Un observador en tierra
	Un columpio de barquilla	Un observador desde fuera
Curvilíneo uniforme $a_n > 0$ $a_t = 0$ $\rho \neq \text{cte}$	Un coche que toma una curva	Observador desde fuera
	Una persona que callejea	Un observador desde fuera
Curvilíneo uniformemente acelerado $a_n > 0$ $\rho \neq \text{cte}$ $a_t = \text{cte}$	El disparo de una flecha	Un observador fuera del movimiento
	Una patada a un balón de fútbol	Un espectador en la grada
Curvilíneo acelerado $a_n > 0$ $\rho \neq \text{cte}$ $a_t \neq 0$	Un globo que se desinfla	Una persona que lo ve desinflarse
	El movimiento de un cometa	Una persona que lo ve desde la Tierra

12. El vector posición de una partícula, en unidades del SI, viene dado por $\vec{r} = [4t\hat{i} + 2t^2\hat{j}]m$. Calcula:
- El vector velocidad instantánea, su módulo, y la velocidad media en los tres primeros segundos.
 - El vector aceleración, su módulo, y la aceleración media en el intervalo anterior.
 - Las componentes intrínsecas de la aceleración.
 - La ecuación de la trayectoria.
 - El radio de curvatura de la trayectoria.

Vector posición: $\vec{r} = 4t\hat{i} + 2t^2\hat{j}$ (m)

$$a) \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 4\hat{i} + 4t\hat{j} \text{ (m/s)}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + (4t)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2 t^2} = \sqrt{4^2} \sqrt{1 + t^2} = 4\sqrt{1 + t^2}$$

$$\vec{r}_1(t_1 = 0s) = 0$$

$$\vec{r}_2(t_2 = 3s) = 4 \cdot 3\hat{i} + 2 \cdot 3^2\hat{j} = 12\hat{i} + 18\hat{j}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 12\hat{i} + 18\hat{j}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 3s$$

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{12\hat{i} + 18\hat{j}}{3} = 4\hat{i} + 6\hat{j} ; |\vec{v}_m| = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} \text{ (m/s)}$$

$$b) \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4\hat{j} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2} = 4 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$\vec{v}_1(t_1 = 0s) = 4\hat{i} + 4 \cdot 0\hat{j} = 4\hat{i}$$

$$\vec{v}_2(t_2 = 3s) = 4\hat{i} + 4 \cdot 3\hat{j} = 4\hat{i} + 12\hat{j}$$

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = 0\hat{i} + 12\hat{j} = 12\hat{j}$$

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{12\hat{j}}{3} = 4\hat{j} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$|\vec{a}_m| = \sqrt{4^2} = 4 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$c) a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d}{dt} [4\sqrt{1+t^2}] = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+t^2}} \cdot 2t = \frac{4t}{\sqrt{1+t^2}} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

Como no tengo 'b', en la calculo con el módulo de $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} ; |\vec{a}|^2 = a_t^2 + a_n^2$$

$$a_n^2 = |\vec{a}|^2 - a_t^2 = 4^2 - \left(\frac{4t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 = 16 - \frac{16t^2}{1+t^2} =$$

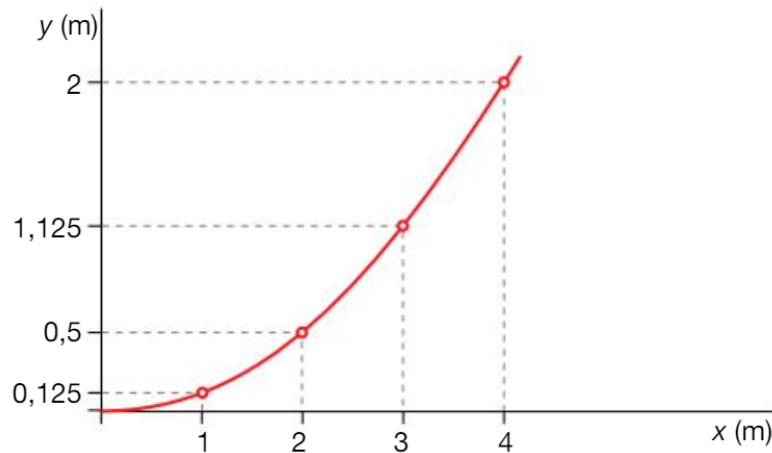
$$= \frac{16(1+t^2) - 16t^2}{1+t^2} = \frac{16 + 16t^2 - 16t^2}{1+t^2} = \frac{16}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow a_n = \sqrt{\frac{16}{1+t^2}} = \frac{4}{\sqrt{1+t^2}} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

Ⓐ Ecuaciones paramétricas de la trayectoria: $x(t) = 4t$
 $y(t) = 2t^2$

Ecuación de la trayectoria:

$$t = \frac{x}{4} \longrightarrow y = 2 \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^2 = 2 \frac{x^2}{16} = \frac{x^2}{8} \quad \text{Ecuación de una parábola}$$



ⓔ $a_n = \frac{|\vec{v}|^2}{R} \longrightarrow R = \frac{|\vec{v}|^2}{a_n}$

$$|\vec{v}|^2 = (4\sqrt{1+t^2})^2 = 16(1+t^2)$$

$$\Rightarrow R = \frac{16(1+t^2)}{\frac{4}{\sqrt{1+t^2}}} = \frac{16(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}{4} =$$

$$= 4(1+t^2)(1+t^2)^{\frac{1}{2}} = 4(1+t^2)^{\frac{3}{2}}$$

Se trata de un movimiento parabólico. La aceleración es constante y, además, solo tiene componente en el eje Y. Por tanto, solo varía la componente Y de la velocidad, que aumenta en el sentido positivo del eje.

El radio de curvatura, como es normal en las parábolas, aumenta conforme transcurre el tiempo.