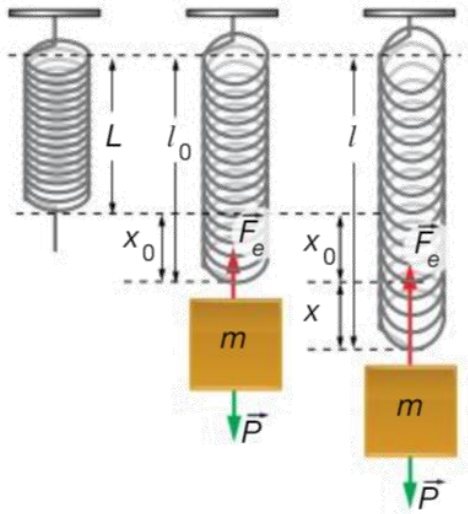
DINÁMICA

Aplicación de las leyes de Newton. Movimiento armónico simple

1. De un muelle de longitud L y constante elástica k, fijado al techo en posición vertical, se cuelga un cuerpo de masa m. El muelle se estira hasta alcanzar una longitud l_0 quedando en equilibrio. Calcula la constante elástica del muelle, y los parámetros del movimiento que se produce cuando, desde esta posición, se tira del cuerpo hacia abajo hasta desplazarlo una distancia x tras lo que se deja libre.



En la situación inicial de equilibrio se verifica que: (2ª ley de Newton)

EJE Y: $P - F_{elas} = 0 \longrightarrow P = F_{elas} \longrightarrow mg = kx_0$

ley de Hooke

$\longrightarrow k = \dfrac{mg}{x_0} = \dfrac{mg}{l_0 - L}$

Cuando el muelle se estira una distancia 'x': (2ª ley de Newton)

EJE Y: $P - F_{elas} = m \cdot a$

$mg - k(x + x_0) = m \cdot a$

$\cancel{mg} - kx - \cancel{kx_0} = m \cdot a \longrightarrow \boxed{a = -\dfrac{k}{m}x}$

Resulta una expresión en donde la aceleración es proporcional a la elongación, relación característica del MAS:

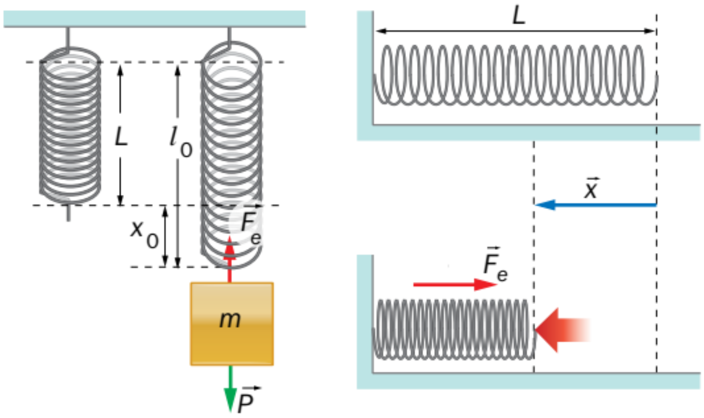
$$\left.\begin{aligned} a &= -\frac{k}{m}x \\ a &= -\omega^2 x \end{aligned}\right\} \quad \frac{k}{m} = \omega^2 \longrightarrow \boxed{k = m\omega^2}$$

De donde sacamos la frecuencia y el periodo:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

2. Un muelle sujeto al techo se estira 5cm cuando de él se cuelga una masa de 200g. El sistema se coloca en una superficie horizontal sin rozamiento, con un extremo del muelle sujeto a una pared, y se empuja el cuerpo hasta que el muelle se comprime 10cm. Calcula los parámetros del movimiento originado cuando se suelta el cuerpo.

Las representaciones de las situaciones que nos proporciona el enunciado son:



Aplicamos la 2ª ley de Newton a la situación de equilibrio:

EJE Y: $P - F_e = 0 \longrightarrow mg - kx_0 = 0$

$$\longrightarrow k = \frac{mg}{x_0} = \frac{0'2 \cdot 9'8}{0'05} = 39'2 \ \frac{N}{m}$$

Cuando el muelle se comprime se obtienen los otros parámetros del movimiento:

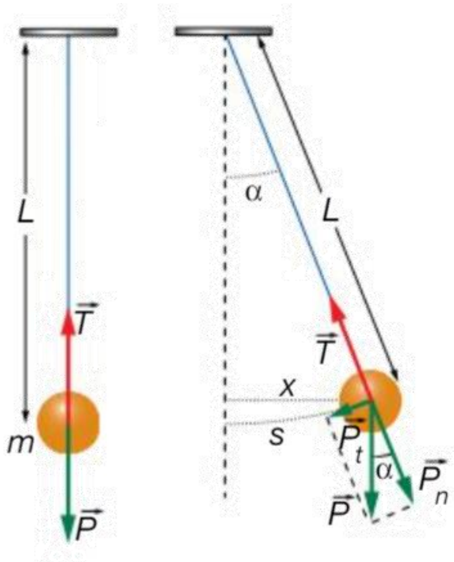
- $A = 10cm = 0'1m$ (máxima compresión)
- $k = m\omega^2 \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{39,2}{0'2}} = 14 \ (rad/s)$
- $x(t=0) = A\, sen(0 \cdot t + \phi_0) = A\, sen(\phi_0) = A$ (amplitud máxima)

  $sen(\phi_0) = 1 \longrightarrow \phi_0 = \pi/2 \ (rad)$

Quedando la ecuación general del M.A.S. como:

$$x(t) = 0'1\, sen(14t + \pi/2) \quad (m)$$

3. De un hilo inextensible de masa despreciable y longitud L, fijado al techo verticalmente, se cuelga un pequeño cuerpo de masa m. Determina las características del movimiento que adquiere cuando se deja libre después de desplazarlo de su posición de equilibrio formando un ángulo α con la vertical.



El sistema descrito recibe el nombre de péndulo simple. Cuando se aleja de la posición de equilibrio la componente normal del peso se ve contrarrestada por la tensión de la cuerda, y la resultante coincide con la componente tangencial.

Aplicando la 2ª ley de Newton:

EJE X: $-P_t = m \cdot a \longrightarrow -p \cdot \operatorname{sen}\alpha = m \cdot a$

$\longrightarrow -\cancel{m}g \operatorname{sen}\alpha = \cancel{m} \cdot a \longrightarrow a = -g\operatorname{sen}\alpha$

Para ángulos pequeños, cuando podamos considerar que la trayectoria curva 's' y la cuerda 'x' tienden a igualarse, se verifica que:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{x}{L} \simeq \frac{s}{L} \longrightarrow \boxed{a = -\frac{g}{L}x}$$

De nuevo, se obtiene una expresión característica del M.A.S.:

$$\left.\begin{array}{l} a = -\frac{g}{L}x \\ a = -\omega^2 x \end{array}\right\} \omega^2 = \frac{g}{L} \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}} \qquad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

El período de oscilación de un péndulo simple, para oscilaciones pequeñas ($\alpha \simeq 4°$), no depende de la amplitud de las oscilaciones. De ahí que se pueda utilizar para realizar medidas de la aceleración de la gravedad, g.

4. Un péndulo simple está formado por una masa de 200g que cuelga de un hilo de 64cm. Calcula el período y la frecuencia de las oscilaciones. ¿Cuál es el valor máximo de la fuerza que actúa sobre el cuerpo, si la amplitud de las oscilaciones es de 2cm? Si al medir el período del péndulo obtenemos el valor 1,65s, ¿cuánto vale g en ese lugar?

Tras la explicación detallada del ejercicio anterior, la frecuencia angular del péndulo, así como su frecuencia y período, son:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{9,8}{0,64}} = 3,91\,\frac{rad}{s}$$

$$\omega = 2\pi f \quad \rightarrow \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3,91}{2\pi} = 0,62Hz \quad \rightarrow \quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0,62} = 1,61s$$

La aceleración máxima del péndulo es:

$$a_{max} = \omega^2 \cdot x = 3,91^2 \cdot 0,02 = 0,306m/s^2$$

Por tanto, la fuerza correspondiente a esta aceleración será:

$$F_{max} = m \cdot a_{max} = 0,2 \cdot 0,306 = 0,06N$$

Para $T = 1,61s$, y sabiendo el valor de la longitud de la cuerda, podemos calcular g en este lugar:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \rightarrow \quad \frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{L}{g}$$

$$\rightarrow \quad g = L\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 0,64\left(\frac{2\pi}{1,61}\right)^2 = 9,747m/s^2$$

5. La tabla muestra el peso de tres objetos y las elongaciones que producen al ser colgados de un muelle. Calcula k y la frecuencia con la que oscila el sistema formado por el muelle y el cuerpo de mayor masa.

	Cuerpo 1	Cuerpo 2	Cuerpo 3
Peso (N)	0,30 ± 0,05	0,65 ± 0,05	0,90 ± 0,05
Δl (cm)	3,8 ± 0,1	8,0 ± 0,1	11,5 ± 0,1

Con la pareja de datos del cuerpo 1 se obtiene una constante elástica k igual a:

$$k_1 = \frac{F_1}{\Delta l_1} = 7,895\text{ N/m}$$

$$\varepsilon_R(k_1) = \varepsilon_R(F) + \varepsilon_R(\Delta l) = \frac{0,05\text{ N}}{0,30\text{ N}} + \frac{0,1\text{ cm}}{3,8\text{ cm}} = 0,193 \rightarrow \varepsilon_a = k_1 \cdot \varepsilon_R = 1,524\text{ N/m}$$

Así, $k_1 = 8 \pm 2$ N/m; de igual modo, $k_2 = 8,1 \pm 0,7$ N/m, y $k_3 = 7,8 \pm 0,5$ N/m. Por tanto, el valor de k, su error y el de ω son:

$$k = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3} = 7,967\text{ N/m} \quad \rightarrow \quad \Delta k = \frac{\Delta k_1 + \Delta k_2 + \Delta k_3}{3} = 1,067\text{ N/m}$$

Por tanto, la constante elástica del muelle es $k = 8 \pm 1$ N/m, y ω vale:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_3}} = \sqrt{\frac{k \cdot g}{P_3}} = 9,3\text{ rad/s}$$