Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2022/2023

UCLM

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Sean las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, con\ a, b, c \in \mathbb{R},\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\ y\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

   a) **[1,5 puntos]** Determina las condiciones que tienen que cumplir los valores a, b, c para que $A \cdot X = B$.

   b) **[1 punto]** Si además queremos que X sea simétrica, ¿qué se debe cumplir? ¿Cómo es la matriz X resultante?

2. *a)* **[0,5 puntos]** Enuncia el teorema de Bolzano.

   b) **[1 punto]** Sea la función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$. Utiliza el teorema de Bolzano para justificar que esta función tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, 2]$.

   c) **[1 punto]** ¿Podría $f(x)$ tener más de una raíz en el intervalo $[0, 2]$? Justifica tu respuesta.

3. Sean el punto $A(1, 1, a)$ y el plano $\pi \equiv b \cdot x + y + z = 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

   a) **[1,5 puntos]** ¿Qué deben cumplir los valores a, b para que el punto A esté contenido en el plano π y éste tenga como vector normal uno que es perpendicular al vector $\vec{u} = (1, 2, 0)$?

   b) **[1 punto]** Con los valores de a, b del apartado anterior, obtén la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto A.

4. *a)* Una empresa de mantenimiento da servicio a empresas de dos polígonos industriales (el polígono Campo y el polígono Llano). El 30 % de las reparaciones se realizan en el polígono Campo mientras que el 70 % se realiza en el polígono Llano. Además, en el polígono Campo el 10 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el 90 % de tipo eléctrico. En el polígono Llano el 30 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el resto de tipo eléctrico.

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un momento dado se realice una reparación de tipo mecánico?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si se ha realizado una reparación de tipo eléctrico, ¿qué probabilidad hay de que se haya realizado en el polígono Llano?

   b) El famoso piloto de carreras Fernando Osnola es capaz de completar una vuelta a un circuito en un tiempo que sigue una distribución normal de media 1.5 minutos y desviación típica 0.15 minutos.

   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que complete una vuelta en menos de 1.35 minutos?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál sería el tiempo exacto que es mayor que el 85.08 % de los tiempos realizados al completar una vuelta al circuito?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633

5. *a)* **[1 punto]** Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2}-(1-3x)^{2/3}}$$

Puedes utilizar el cambio de variable $1 - 3x = t^6$.

b) **[1,5 puntos]** Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sin calcular A^{-1}, razona por qué A^{-1} existe y discute si la matriz $A^{-1} \cdot B$ tiene inversa.

6. *a)* **[1 punto]** Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{x^2}$$

b) **[1,5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, 1, 3)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores $\vec{u} = (2, 2, 0)$ y $\vec{v} = (0, 0, -1)$.

7. *a)* **[1 punto]** Sea la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$. Obtén sus máximos y mínimos relativos.

b) Una urna contiene cuatro bolas numeradas del 1 al 4. Se extraen al azar dos bolas sin reemplazamiento y se obtiene una puntuación igual a la suma de los valores correspondientes.

b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación obtenida sea de 3?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación sea mayor de 3?

8. *a)* **[1,25 puntos]** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula el rango de A.

b) **[1,25 puntos]** Sea la recta r definida por la intersección de los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = 1$, $\pi_2 \equiv y + 2z = 1$. Por otro lado, consideraremos el plano $\pi_3 \equiv 2x + y = 1$. Determina la posición relativa de la recta r y el plano π_3. El resultado del apartado anterior te puede ayudar.

Junio 2023

1) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) $AX = B$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+c & 2b \\ 4a+2c & 4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+c=1 \\ 2b=0 \Rightarrow b=0 \\ 4a+2c=2 \Rightarrow 2a+c=1 \\ 4b=0 \Rightarrow b=0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Las condiciones son } b=0 \text{ y } 2a+c=1}$

b) Si X es simétrica $\Rightarrow X = X^T$, es decir, $b=c$, por lo que se tiene que cumplir que $\boxed{b=0=c \ \text{ y } \ a=\frac{1}{2}}$

2) a) Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y en los extremos del intervalo toma valores de signo contrario, entonces $\exists c \in (a,b) \, / \, f(c)=0$.

b) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$

$[a,b] = [0,2]$

- f es continua en $\mathbb{R}$ por ser una función polinómica, luego en particular es continua en $[0,2]$.
- $f(0) = -10 < 0$

  $f(2) = 2^3 + 6\cdot 2^2 + 3\cdot 2 - 10 = 28 > 0$

Aplicando el T^a de Bolzano, $\exists c \in (0,2)$ t.q. $f(c)=0$, es decir, c es una raíz de f en dicho intervalo.

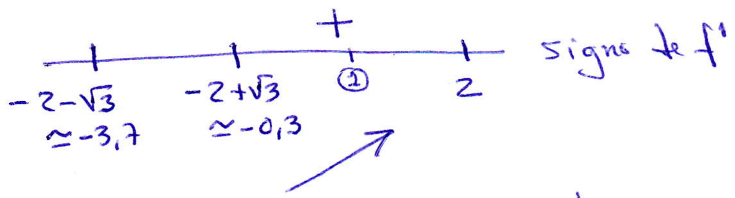
c) Como consecuencia del T^a de Rolle, si vemos que $f'(x) \neq 0$ en $[0,2]$, entonces f tiene una única raíz en $[0,2]$.

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 3$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 12x + 3 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -2+\sqrt{3} \\ -2-\sqrt{3} \end{cases} \notin [0,2] \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ tiene una única raíz en $[0,2]$.

Este apartado también se puede hacer viendo si f es estricta^{te} monótona en $[0,2]$, ya que en dicho caso f(x) solo puede tener una única raíz en $[0,2]$



Como f es estrictamente creciente en $[0,2]$, f(x) tiene una única raíz en dicho intervalo.

③ $A(1,1,a)$ $\qquad a,b \in \mathbb{R}$

$\pi \equiv bx + y + z = 1$

a) ¿ a,b para que $\begin{matrix} A \in \pi \\ \vec{n}_\pi \perp \vec{u} = (1,2,0) \end{matrix}$?

- $A \in \pi \Rightarrow b \cdot 1 + 1 + a = 1 \Rightarrow a + b = 0$
- $\vec{n}_\pi = (b,1,1) \perp \vec{u} = (1,2,0) \Rightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2$

Así, $\boxed{a = 2 \text{ y } b = -2}$

b) ¿ r recta / $\begin{matrix} r \perp \pi \\ A \in r \end{matrix}$?

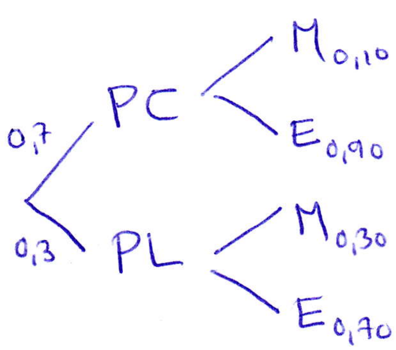
$$\left.\begin{matrix} \bullet\ \vec{u}_r \perp \pi \Rightarrow \vec{u}_r = \vec{n}_\pi = (-2,1,1) \\ \bullet\ A \in r \Rightarrow (1,1,3) \in r \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}}$$

④ a) PC = reparación en el polígono Campo

PL = " " " Llano

M = reparación de tipo mecánico

E = " " " eléctrico



a.1.) $\boxed{P(M)} = P(PC)P(M/PC) + P(PL)P(M/PL) =$

$= 0,3 \cdot 0,1 + 0,7 \cdot 0,3 = \boxed{0,24}$

a.2) $\boxed{P(PL/E)} = \dfrac{P(PL \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0,7 \cdot 0,7}{\underbrace{0,76}_{=1-P(M)}} =$

$= \boxed{0,64}$

b) X = tiempo en completar una vuelta

$X \sim N(1{,}5\ ,\ 0{,}15)$

b.1) $\boxed{P(X<1{,}35) = P\left(Z< \frac{1{,}35-1{,}5}{0{,}15}\right) = P(Z<-1) = 1-P(Z<1) = 1-0{,}8413 = 0{,}1587}$

b.2) $P(X<a) = 0{,}8508$

$\parallel$

$P\left(Z<\frac{a-1{,}5}{0{,}15}\right) = 0{,}8508$ donde $\frac{a-1{,}5}{0{,}15} > 0$ ya que la probabilidad es mayor de 0,5

$\Downarrow$ (mirando en la tabla)

$\frac{a-1{,}5}{0{,}15} = 1{,}04 \Rightarrow \boxed{a = 1{,}656\ s}$

5 a) $\boxed{\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2}-(1-3x)^{2/3}}} = \left[\begin{array}{l} 1-3x = t^6 \\ -3dx = 6t^5dt \Rightarrow dx = -2t^5dt \end{array}\right] =$

$= \int \frac{-2t^5dt}{(t^6)^{1/2}-(t^6)^{2/3}} = -2\int \frac{t^5dt}{t^3-t^4} = -2\int \frac{t^3\cdot t^2}{t^3(1-t)}dt =$

$= -2\int \frac{t^2}{1-t}dt \underset{(1)}{=} -2\int\left(-t-1-\frac{1}{t-1}\right)dt =$

$= -2\left(\frac{-t^2}{2}-t-\ln|t-1|\right) = t^2+2t+2\ln|t-1| =$

$= \boxed{\sqrt[3]{1-3x}+2\cdot\sqrt[6]{1-3x}+2\ln\left|\sqrt[6]{1-3x}-1\right|+C}$

donde en (1) hemos tenido en cuenta que:

$$\begin{array}{r|l} t^2 & 1-t \\ \cline{2-2} -t^2+t & -t-1 \\ \hline t & \\ -t+1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$t^2 = (1-t)(-t-1)+1$

$\frac{t^2}{1-t} = -t-1+\frac{1}{1-t}$

$= -t-1-\frac{1}{t-1}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

• ¿$\exists A^{-1}$?

$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$ y $\det A = -2 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

• ¿$\exists (A^{-1}B)^{-1}$?

$$\left.\begin{array}{l} (A^{-1}B)^{-1} = B^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} = B^{-1}A \\ \text{Ahora bien, } \nexists B^{-1} \text{ ya que } B \text{ tiene una fila de ceros} \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists (A^{-1}B)^{-1}$$

⑥ a) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{x^2} = [1^{+\infty}] = [e^{+\infty}] = +\infty}$ (✱) Al final, de otra forma.

ya que $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{5x+1}{5x} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{5x+1-5x}{5x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{5x} = +\infty$

b) ¿r recta t.q. $A(2,1,3) \in r$
$\vec{u}_r \perp \vec{u}$ y $\vec{u}_r \perp \vec{v}$?

Si $\vec{u}_r \perp \vec{u}$ y $\vec{u}_r \perp \vec{v}$, entonces $\vec{u}_r \perp \vec{u} \times \vec{v}$, y como

$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{j} = (-2,2,0)$, podemos tomar $\vec{u}_r = (-2,2,0)$

Así, la recta pedida es:

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}}$$

⑦ a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$

$f''(x) = 6x + 6$

$$\left.\begin{array}{l} f''\left(-1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\right) > 0 \\ f''\left(-1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f tiene en $x = -1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$ un mín. relativo de coordenadas

$$\boxed{\left(-1 + \frac{\sqrt{6}}{3}, 4 - \frac{4\sqrt{6}}{9}\right)}$$

f tiene en $x = -1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$ un máximo relativo de coordenadas

$$\boxed{\left(-1 - \frac{\sqrt{6}}{3}, 4 + \frac{4\sqrt{6}}{9}\right)}$$

b) $\boxed{\begin{matrix} ① & ② \\ ③ & ④ \end{matrix}} \longrightarrow$ 2 bolas sin reemplazamiento

b.1) $\boxed{P(\text{puntuación obtenida} = 3)} = P(① + ②) + P(② + ①) =$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{12} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

b.2) $\boxed{P(\text{puntuación obtenida} > 3)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} +$

$$+ \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

8 a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2F_1 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \boxed{rg A = 2}$

b) $r \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv x + y + z = 1 \\ \pi_2 \equiv y + 2z = 1 \end{cases}$ Posición relativa de r y π_3

$\pi_3 \equiv 2x + y = 1$

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\left.\begin{matrix} \det \tilde{A} = 4 - 2 - 2 = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ rango $\tilde{A} = 2$

Como rango $\tilde{A} = 2 =$ rango $A \Rightarrow$ S.C.I. $\Rightarrow \boxed{r \subset \pi_3}$

6 a) $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{x^2}} = [1^{\infty}] =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5x+1}{5x}-1\right)^{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\cancel{5x}+1-\cancel{5x}}{5x}\right)^{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{5x\cdot\frac{1}{5x}\cdot x^2} =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{5x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{5}} = [e^{+\infty}] = \boxed{+\infty}$$