Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2021/2022

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. *a*) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{llllc} x & +2y & +3z & = & a+1 \\ ax & & +z & = & 0 \\ x & +y & +2z & = & 1 \end{array}\right. .$$

   b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 1$, si es posible.

2. *a*) **[1,5 puntos]** Encuentra razonadamente el valor de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \frac{ax+1}{2x+b}$$

   tenga una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$ y tienda a 2 cuando $x \longrightarrow +\infty$.

   b) **[1 punto]** Resuelve la siguiente integral:

$$\int x \cdot \cos(2x) dx.$$

3. *a*) **[1,5 puntos]** Estudia la continuidad en $\mathbb{R}$ de la función

$$f(x) = \left(2e^{x^2-4} - 8x + 14\right) / \left(x^2 - 2x\right).$$

   b) **[1 punto]** Sea el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

   donde $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}$. Calcula razonadamente (e indicando las propiedades de los determinantes que utilizas) el determinante de

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}.$$

4. Sea el punto $A = (1, 0, 1)$ y el plano $\pi \equiv x + y + z = 8$.

   a) **[1,5 puntos]** Calcula la recta perpendicular a π y que pasa por A. ¿En qué punto se cortan la recta y el plano?

   b) **[1 punto]** Obtén el punto de la recta anterior distinto de A que dista de π igual que A, es decir, el punto simétrico de A con respecto a π.

5. *a*) **[1 punto]** Sea el plano $\pi \equiv x - 3y + z = 0$ y los puntos $A = (0, 0, -1)$ y $B = (1, 1, 1)$. Obtén el plano perpendicular a π y que contiene a A y B.

b) **[1,5 puntos]** Calcula el área de la región delimitada por las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 5$ y $g(x) = 3 - x$.

6. *a*) **[1,5 puntos]** Sea el tetraedro cuyos vértices son los puntos $A = (a, 0, 1)$, $B = (1, 3, 0)$, $C = (0, 1, 0)$ y $D = (1, 1, 1)$, con $a \in \mathbb{R}$. Halla los valores de a para que el volumen de dicho tetraedro sea 1.

b) **[1 punto]** Enuncia el teorema de Bolzano. Utiliza este teorema para razonar que la función

$$f(x) = (2e^x - 8x - 3) \,/\, (x^2 + 2)$$

corta al eje de abscisas al menos una vez.

7. *a*) **[1,5 puntos]** Despeja la matriz X de la ecuación matricial $A \cdot X + B = X$, siendo X, A y B matrices cuadradas cualesquiera. Calcula X para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

b) **[1 punto]** Un piloto de Fórmula 1 tiene una probabilidad del 60 % de ganar una carrera cualquiera. Si participa en las próximas 4 carreras, ¿cuál es la probabilidad de que gane al menos dos?

n	k \ p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
4	0	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0756	0.0256	0.0036
	2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2646	0.1536	0.0486
	3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4116	0.4096	0.2916
	4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401	0.4096	0.6561

8. *a*) En un determinado I.E.S. la probabilidad de que un alumno apruebe si va a clase es del 80 % mientras que si no va a clase es del 50 %. El 90 % de los alumnos va a clase.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno apruebe?

a.2) **[0,75 puntos]** Si un alumno ha suspendido, ¿cuál es la probabilidad de que no haya ido a clase?

b) Una empresa embotelladora de agua produce botellas de 150 ml. La cantidad que realmente contienen sigue una distribución normal con media 150 ml y desviación típica 5 ml.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué proporción de las botellas contiene más de 152 ml?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué proporción de botellas tiene entre 149 y 152 ml?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549

Julio 2022

Cipri

1) a) $M=\begin{pmatrix}1&2&3\\a&0&1\\1&1&2\end{pmatrix}$, $\tilde{M}=\begin{pmatrix}1&2&3&a+1\\a&0&1&0\\1&1&2&1\end{pmatrix}$

Rango de M

$|M| = 3a+2-1-4a = 1-a = 0 \Rightarrow a=1$

Si $a\neq 1 \Rightarrow rg M = 3$

Si $a=1 \Rightarrow rg M = 2$ ya que $\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix}\neq 0$

Rango de $\tilde{M}$

Si $a\neq 1 \Rightarrow rg\,\tilde{M}=3$

$a=1 \Rightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&2\\1&0&1&0\\1&1&2&1\end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&-2&-2&-2\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix} \xrightarrow{-2F_3+F_2}$

$\rightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&-2&-2&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow rg\,\tilde{M}=2$

Discusión

Si $a\neq 1 \Rightarrow rg M = 3 = rg\,\tilde{M} = n^{o}$ de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D.

$a=1 \Rightarrow rg M = 2 = rg\,\tilde{M} < 3 = n^{o}$ de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.I.

b) Resolución para $a=1$

$\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}[1]\\[2]\\ \end{matrix}$ Llamamos $z=\lambda\in\mathbb{R}$

De [2]: $y = 1-\lambda$

Sustituyendo en [1]: $x = 2-2(1-\lambda)-3\lambda =$
$= -\lambda$

$\boxed{\text{Soluciones}: (x,y,z) = (-\lambda, 1-\lambda, \lambda) \text{ con } \lambda\in\mathbb{R}}$

(2) a) Para que f tenga una discontinuidad de salto infinito en $x=1$ se tiene que verificar que $\lim_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$ [1]

Y, por otra parte, el enunciado dice que

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2 \qquad [2]$$

Resolvemos el sistema [1], [2]:

$$[1]: \lim_{x\to 1} f(x) = \pm\infty \Rightarrow 2\cdot 1 + b = 0 \Rightarrow b = -2$$

$$[2]: \lim_{x\to +\infty} f(x) = 2 \Rightarrow \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = 4$$

$\boxed{\text{Solución: } (a,b) = (4,-2)}$

b) $$\int x\cos(2x)\,dx = \begin{bmatrix} u = x \longrightarrow du = dx \\ dv = \cos(2x)\,dx \rightarrow v = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2x) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\,x\,\mathrm{sen}(2x) - \frac{1}{2}\int \mathrm{sen}(2x)\,dx = \boxed{\frac{1}{2}\,x\,\mathrm{sen}(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C}$$

(3) a) $$f(x) = \frac{2e^{x^2-4} - 8x + 14}{x^2 - 2x}$$

f es cociente de funciones continuas, luego es continua en

$$\mathbb{R} - \{x\in\mathbb{R} : x^2 - 2x = 0\} = \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

Vamos a clasificar las discontinuidades de f, aunque no se pide expresamente:

Discontinuidad en $x=2$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{2e^{x^2-4} - 8x + 14}{x^2 - 2x} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{2e^{x^2-4}\cdot(2x) - 8}{2x - 2} =$$

$= \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow$ f presenta una discontinuidad evitable en $x=2$

Discontinuidad en $x=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{x^2-4}-8x+14}{x^2-2x} = \infty \Rightarrow$$ f presenta una discontinuidad de salto infinito en $x=0$

b) Sabemos que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$ y tenemos que calcular

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} \underset{[1]}{=} 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} \underset{[2]}{=}$$

$$= 2\cdot\left[\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ x & y & z \end{vmatrix}\right] \underset{[1]}{\overset{[3]}{=}} 2\cdot\left[\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix}\right] =$$

$$\underset{[4]}{=} 2\cdot(-2) = \boxed{-4}$$

[1] Si multiplicas una fila o columna por un nº real, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

[2] Un determinante, con una fila o columna formada por la suma de dos números, puede descomponerse en suma de otros dos determinantes que tienen las mismas filas o columnas resultantes y, en lugar de aquellas, otra formada por los primeros y segundos sumandos, respectivamente.

[3] Si se intercambian dos filas o columnas, cambia el signo del determinante.

[4] El determinante de una matriz con dos filas o columnas iguales es cero.

4 a) $A(1,0,1)$

$$\pi \equiv x+y+z=8$$

La recta $r \perp \pi$ que contiene a A está determinada por

$$r \equiv \{A, \vec{u}_r = \vec{n}_\pi\}$$

$$\vec{n}_\pi = (1,1,1) \Rightarrow \boxed{r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}}$$

Calculamos ahora el punto de intersección de r y π:

$$r \cap \pi \equiv \begin{cases} x-1=y \\ y=z-1 \\ x+y+z=8 \end{cases} \quad x-1=z-1 \Rightarrow x=z$$

$$2x+x-1=8$$

$$x=3=z \Rightarrow y=2$$

$$\boxed{\text{El punto de corte de } r \text{ y } \pi \text{ es } (x,y,z)=(3,2,3)}$$

__De otra forma:__

Las ecuaciones paramétricas de la recta son

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

y para calcular el punto de corte de r y π, sustituimos las coord. de la ec. de la recta, en la ec. del plano, para determinar λ:

$$1+\lambda+\lambda+1+\lambda=8 \Rightarrow 3\lambda=6 \Rightarrow \lambda=2$$

y, por tanto, el punto pedido es

$$\boxed{(x,y,z)=(1+2,\ 2,\ 1+2)=(3,2,3)}$$

b) El punto simétrico de un punto respecto de un plano se puede obtener sumando al punto A, dos veces el vector $\vec{AB}$, donde B es el punto de intersección de r y π:

$$\vec{AB}=(3,2,3)-(1,0,1)=(2,2,2)$$

y así, $\boxed{C = (1,0,1) + 2(2,2,2) = (5,4,5)}$

5) a) $\pi \equiv x - 3y + z = 0$, $A(0,0,-1)$, $B(1,1,1)$ $\Big\}$ α plano t.q. $\begin{cases} \alpha \perp \pi \\ A, B \in \alpha \end{cases}$

α está determinado por: $\alpha \equiv \{A, \vec{n}_\pi, \vec{AB}\}$

$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\pi = (1,-3,1) \\ \vec{AB} = (1,1,1) - (0,0,-1) = (1,1,2) \end{array}\right\}$ $\boxed{\alpha \equiv \begin{cases} x = 0 + \lambda + \mu \\ y = 0 - 3\lambda + \mu \\ z = -1 + \lambda + 2\mu \end{cases} \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$

b) El área pedida es $A = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \right|$

donde a y b son las abscisas de los puntos de corte de f y g:

$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 3 - x \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

Así:

$$A = \left| \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)\,dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_1^2 \right| =$$

$$= \left| \frac{8}{3} - 6 + 4 - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 \right) \right| = \frac{1}{6}\ u^2$$

6) a) $V_{tetraedro} = \frac{1}{6} \left| \det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) \right| =$

$\vec{AB} = (1,3,0) - (a,0,1) = (1-a, 3, -1)$

$\vec{AC} = (0,1,0) - (a,0,1) = (-a, 1, -1)$

$\vec{AD} = (1,1,1) - (a,0,1) = (1-a, 1, 0)$

$$= \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} 1-a & -a & +1-a \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{6} \left| -3(1-a) + a + 1 + 1 - a + 1 - a \right| =$$

$$= \frac{1}{6} \left| 2a - 1 \right| = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a-1=6 \Rightarrow \boxed{a=\frac{7}{2}} \\ 2a-1=-6 \Rightarrow \boxed{a=-\frac{5}{2}} \end{cases}$$

b) Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ tal que signo $f(a) \neq$ signo $f(b)$, entonces $\exists c \in (a,b)$ t.q. $f(c)=0$.

Aplicación

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, ya que es cociente de funciones continuas y el denominador no se anula en $\mathbb{R}$ y, por tanto, es continua en $[-1,1]$

y
$$f(-1) = \frac{2e^{-1}-8\cdot(-1)-3}{(-1)^2+2} > 0$$

$$f(1) = \frac{2e-8\cdot 1-3}{1^2+2} < 0$$

Aplicando el teorema de Bolzano, $\exists c \in (-1,1)$ t.q. $f(c)=0$, esto es, f corta al eje de abscisas al menos una vez (en c).

7 a) $AX+B=X$

$AX-X=-B$

$(A-I)X=-B \Rightarrow (A-I)^{-1}(A-I)X=(A-I)^{-1}(-B)$

$$\boxed{X=(A-I)^{-1}(-B)}$$

$$A-I=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1:2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}F_2+F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}$$

b) X = número de carreras que gana el piloto

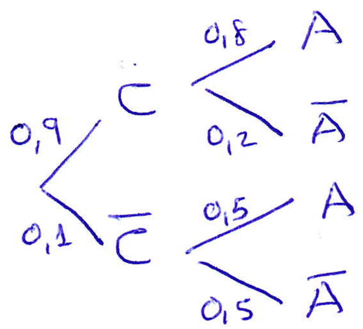
$$X \sim B(0{,}6\ ,\ 4)$$

$$\boxed{P(X \geq 2)} = 1 - \left[P(X=0) + P(X=1)\right] =$$

$$= 1 - (0{,}0256 + 0{,}1536) = \boxed{0{,}8208}$$

(8) a) C = el alumno va a clase

A = el alumno aprueba



a.1) $\boxed{P(A)} = P(C)\,P(A/C) + P(\bar{C})\,P(A/\bar{C}) =$

$$= 0{,}9 \cdot 0{,}8 + 0{,}1 \cdot 0{,}5 = \boxed{0{,}77}$$

a.2) $\boxed{P(\bar{C}/\bar{A})} = \dfrac{P(\bar{C} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} =$

$$= \frac{0{,}1 \cdot 0{,}5}{1 - 0{,}77} = \boxed{0{,}2174}$$

b) X = cantidad de agua embotellada

$$X \sim N(150, 5)$$

b.1) $\boxed{P(X > 152)} = P\left(Z > \dfrac{152-150}{5}\right) = P(Z > 0{,}4) =$

$$= 1 - P(Z \leq 0{,}4) = 1 - 0{,}6554 = \boxed{0{,}3446}$$

b.2) $P(149 \leq X \leq 152) = P\left(\dfrac{149-150}{5} \leq Z \leq \dfrac{152-150}{5}\right) =$

$$= P(-0{,}2 \leq Z \leq 0{,}4) = P(Z \leq 0{,}4) - P(Z \leq -0{,}2) =$$

$$= P(Z \leq 0{,}4) - \left[1 - P(Z \leq 0{,}2)\right] =$$

$$= 0{,}6554 - \left[1 - 0{,}5793\right] = 0{,}2347 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{la proporción es del } 23{,}47\ \%}$