Julio 2021

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2020/2021

UCLM

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) [**1 punto**] Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

   b) [**1,5 puntos**] Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + 3I = A$.

2. *a*) [**1,75 puntos**] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{llll} x & +ay & +z & = & 2 \\ x & & +z & = & a \\ ax & +2y & +z & = & 3 \end{array} \right. .$$

   b) [**0,75 puntos**] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

3. *a*) [**1,25 punto**] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int x \cdot cos(3x)dx$.

   b) [**1,25 puntos**] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+1}$.

4. Sean los planos $\pi_1 \equiv a \cdot x + y + 2 \cdot z = 3$ y $\pi_2 \equiv 2 \cdot x - y + a \cdot z = 0$.

   a) [**1 punto**] Determina razonadamente el valor de a para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.

   b) [**1,5 puntos**] Para $a = 1$ calcula la distancia del punto $P(2, 0, 1)$ al plano π_1.

5. *a*) [**1 punto**] Calcula razonadamente el siguiente límite: $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{e^{x-1}-1}$.

   b) [**1,5 puntos**] Dada la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} e^x & \text{si} & x < 0 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si} & 0 \leq x \leq 2 \\ x & \text{si} & x > 2 \end{array} \right. ,$$

   estudia su continuidad en $x = 0$ y en $x = 2$ e indica el tipo de discontinuidad, si la hubiera.

6. Sea la función $f(x) = \dfrac{2x^2+2x-2}{3x^2+3}$.

   a) [**1,5 puntos**] Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.

   b) [**1 punto**] Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

7. *a*) **[1 punto]** Sea la función $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + x - 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina los valores de a y b para que la gráfica de $f(x)$ pase por el punto $(1, 1)$ y tenga aquí un punto de inflexión.

   b) **[1,5 puntos]** Sea la función $f(x) = x\,\text{sen}(x) - \cos(x)$. Enuncia el teorema de Rolle y úsalo para razonar si la función $f(x)$ tiene al menos un extremo relativo en el intervalo $[-1, 1]$.

8. *a*) En el servicio de urgencias clasifican a los pacientes en leves y graves según llegan al hospital. El 20 % de los pacientes leves debe ingresar en el hospital, mientras que el 60 % de los pacientes graves debe hacerlo. En un día cualquiera llegan al servicio de urgencias un 90 % de pacientes leves y un 10 % de pacientes graves. Si se selecciona un paciente al azar:

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que deba ingresar en el hospital?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el paciente tuvo que ingresar, ¿cuál es la probabilidad de que llegara al hospital con una dolencia leve?

   b) En un momento dado llegan 8 pacientes a urgencias.

   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que exactamente 4 pacientes se clasifiquen como leves?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 7 pacientes sean clasificados como leves?

n	**k** \ **p**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**
8	**0**	0.4305	0.1678	0.0576	0.0168	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3826	0.3355	0.1977	0.0896	0.0313	0.0079	0.0012	0.0001	0.0000
	2	0.1488	0.2936	0.2965	0.2090	0.1094	0.0413	0.0100	0.0011	0.0000
	3	0.0331	0.1468	0.2541	0.2787	0.2188	0.1239	0.0467	0.0092	0.0004
	4	0.0046	0.0459	0.1361	0.2322	0.2734	0.2322	0.1361	0.0459	0.0046
	5	0.0004	0.0092	0.0467	0.1239	0.2188	0.2787	0.2541	0.1468	0.0331
	6	0.0000	0.0011	0.0100	0.0413	0.1094	0.2090	0.2965	0.2936	0.1488
	7	0.0000	0.0001	0.0012	0.0079	0.0313	0.0896	0.1977	0.3355	0.3826
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0039	0.0168	0.0576	0.1678	0.4305

Julio 2021

$\mathbb{C}\vec{i}p\vec{r}i$

1: a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-3F_1+F_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 : 2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_3+F_1]{-F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right) = (I|A^{-1})$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

b) $AX + 3I = A$

$AX = A - 3I$

$A^{-1}AX = A^{-1}(A-3I)$

$\boxed{X = A^{-1}(A-3I)}$ [1]

$X = A^{-1}A - A^{-1}3I$

$\boxed{X = I - A^{-1}3I}$ [2]

Calculamos $A-3I$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos $A^{-1}(A-3I)$ con [1]

$$\boxed{X = A^{-1}(A-3I) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & 3/2 \\ -3/2 & 11/2 & -3/2 \\ 3/2 & -9/2 & -1/2 \end{pmatrix}}$$

Calculamos X con [2]

$$X = I - A^{-1}3I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 & -3/2 \\ 3/2 & -9/2 & 3/2 \\ -3/2 & 9/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & 3/2 \\ -3/2 & 11/2 & -3/2 \\ 3/2 & -9/2 & -1/2 \end{pmatrix}}$$

$\vec{C}ip\vec{r}i$

2.- a) $\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ x + z = a \\ ax + 2y + z = 3 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & a \\ a & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Determinante de A

$$|A| = 2 + a^2 - 2 - a = a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Rango de $\tilde{A}$ para $a=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } \tilde{A} = 3$$

Rango de $\tilde{A}$ para $a=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_2]{-F_1+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ rango $\tilde{A} = 2$

Discusión:

Si $a \neq \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow$ rango $A = 3 =$ rango $\tilde{A} =$ nº incógnitas $\Rightarrow$ (TRF) Sistema Compatible Determinado

Si $a = 0 \Rightarrow$ rango $A = 2 \neq$ rango $\tilde{A} \Rightarrow$ (TRF) Sistema Incompatible

Si $a = 1 \Rightarrow$ rango $A = 2 =$ rango $\tilde{A} \Rightarrow$ (TRF) Sistema Compatible Indeterminado

b) Resolución para $a=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [2]: $y = 0$

Sustituimos en [3]:

$$-2y - z = -1 \Rightarrow z = -2\cdot 0 + 1 = 1$$

Sustituimos en [1]:

$$x + 2y + z = 2 \Rightarrow x = 2 - 2\cdot 0 - 1 = 1$$

$$\boxed{\text{Solución: } (x, y, z) = (1, 0, 1)}$$

Cipri

(3) a) $\int x\cos(3x)\,dx = \left[\begin{array}{l} t = 3x \\ dt = 3dx \end{array}\right] = \int \frac{t}{3}\cos t\,\frac{dt}{3} =$

$= \frac{1}{9}\int t\cos t\,dt = \left[\begin{array}{l} u = t \longrightarrow du = dt \\ dv = \cos t\,dt \longrightarrow v = \operatorname{sen} t \end{array}\right] =$

$= \frac{1}{9}\left(t\operatorname{sen} t - \int \operatorname{sen} t\,dt\right) = \boxed{\frac{1}{9}\Big(3x\operatorname{sen}(3x) + \cos(3x)\Big) + C}$

b) $\int \frac{dx}{2x^2+1} = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2}x \\ dt = \sqrt{2}dx \end{array}\right] = \int \frac{\frac{dt}{\sqrt{2}}}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{t^2+1} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg} t = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x) + C}$

(4) $\pi_1 \equiv ax + y + 2z = 3$

$\pi_2 \equiv 2x - y + az = 0$

a) ¿a para que $\pi_1 \perp \pi_2$?

$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1}\cdot\vec{n}_{\pi_2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a, 1, 2)\cdot(2, -1, a) = 0 \Rightarrow 2a - 1 + 2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1/4}$

b) Usando la fórmula

$$d(P, \pi_1) = \frac{|2 + 0 + 2\cdot 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{6}\ u}$$

De otra forma

(1) Determinamos una recta $r \perp \pi_1$ que pase por P.

$$r \equiv \{P, \vec{u_r} = \vec{n}_{\pi_1}\}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

(2) Calculamos $Q = r \cap \pi_1$

$$\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow (2+\lambda) + \lambda + 2\cdot(1+2\lambda) = 3 \Rightarrow 6\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{6}$$

sust. en la ec. del plano π_1

$$Q \begin{cases} x = 2+\frac{1}{6} \\ y = 1/6 \\ z = 1+2\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{13}{6}, \frac{1}{6}, \frac{4}{3}\right)$$

(3) Calculamos $|\vec{PQ}|$

$$\vec{PQ} = \left(\frac{13}{6}, \frac{1}{6}, \frac{4}{3}\right) - (2,0,1) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

(4) $\boxed{d(P, \pi_1) = |\vec{PQ}| = \frac{\sqrt{6}}{6}\ u}$

⑤ a) $$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{e^{x-1}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{+1}{e^{x-1}} = \frac{1}{e^0} = 1}$$

regla de L'Hôpital

b) $$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x<0 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x & \text{si } x>2 \end{cases}$$

Continuidad en $x=0$: ¿$\exists \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$?

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} e^x = e^0 = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0-1} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x) \Rightarrow$$

f no es continua en $x=0$ y presenta en dicho punto una discontinuidad de salto finito 2

Continuidad en $x=2$: ¿$\exists \lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$?

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-1} = 1 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f(x) \Rightarrow$$

f no es continua en $x=2$ y presenta una discontinuidad en dicho punto de salto finito 1.

Nota: Las discontinuidades de salto (finito o infinito) son discontinuidades no evitables de primera especie.

(6) $f(x) = \dfrac{2x^2+2x-2}{3x^2+3}$

a) Extremos relativos de f

$$f'(x) = \frac{(4x+2)(3x^2+3) - (2x^2+2x-2)\cdot 6x}{(3x^2+3)^2} = \frac{-6(x^2-4x-1)}{(3x^2+3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -6(x^2-4x-1) = 0 \Rightarrow x^2-4x-1 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} \end{cases}$$

(posibles extremos rel.)

$$f''(x) = \frac{(24-12x)(3x^2+3)^2 + 6(x^2-4x-1)\cdot 2(3x^2+3)\cdot 6x}{(3x^2+3)^4} =$$

$$= \frac{108x^5 - 648x^4 - 216x^3 - 432x^2 - 324x + 216}{(3x^2+3)^4}$$

$f''(2-\sqrt{5}) > 0 \Rightarrow$ f tiene en $x = 2-\sqrt{5}$ un mín. relativo de coordenadas $(2-\sqrt{5}, f(2-\sqrt{5})) = (2-\sqrt{5}, -\frac{\sqrt{5}}{3})$

$f''(2+\sqrt{5}) < 0 \Rightarrow$ f tiene en $x = 2+\sqrt{2}$ un máximo relativo de coordenadas $(2+\sqrt{5}), f(2+\sqrt{5})) = (2+\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{3})$

b) Ec. de la recta tangente a f en $x=1$

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1) = \frac{2}{3} \\ f(1) = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \boxed{y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}(x-1)}$$

Ec. de la recta normal a f en $x=1$

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

$$y - \frac{1}{3} = -\frac{1}{\frac{2}{3}}(x-1) \Rightarrow \boxed{y - \frac{1}{3} = -\frac{3}{2}(x-1)}$$

7 $f(x) = ax^3 + bx^2 + x - 1$

a) $\begin{cases} f \text{ pasa por } (1,1) \Rightarrow f(1)=1 \\ f \text{ tiene un punto de inflexión en } (1,1) \Rightarrow f''(1)=0 \end{cases}$

- $f(1) = 1 \Rightarrow a + b = 1$
- $f''(1) = 1$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(1) = 6a + 2b = 0$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 6a + 2b = 0 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-6)} \begin{array}{r} -6a - 6b = -6 \\ 6a + 2b = 0 \\ \hline -4b = -6 \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow b = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{Para } (a,b) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \text{ la función cumple lo que se pide.}}$

b) • Teorema de Rolle

Si f es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $f(a) = f(b)$, entonces $\exists c \in (a,b)$ t.q. $f'(c) = 0$

- $f(x) = x \operatorname{sen} x - \cos x$

i) f es continua en $\mathbb{R}$, por ser diferencia de funciones continuas, luego es continua en $[-1,1]$

ii) f es derivable en $\mathbb{R}$, por ser diferencia de funciones derivables, luego es derivable en $(-1,1)$

iii) $f(1) = \operatorname{sen} 1 - \cos 1$

$f(-1) = -\operatorname{sen}(-1) - \cos(-1) = \operatorname{sen}(1) - \cos 1$

sen es impar
cos es par

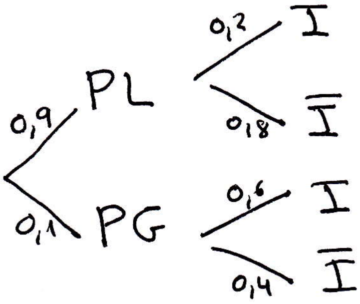
Aplicando el teorema de Rolle, $\exists c \in (-1,1)$ t.q. $f'(c) = 0$

Por tanto, si f tiene un extremo relativo en $(-1,1)$, es en c.

8 a) PL = paciente leve

PG = paciente grave

I = paciente ingresa en el hospital



a1) $\boxed{P(I) = P(PL)\,P(I/PL) + P(PG)\,P(I/PG)}$

$= 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}6 = \boxed{0{,}24}$

a2) $\boxed{P(PL/I)} = \dfrac{P(PL \cap I)}{P(I)} =$

$= \dfrac{0{,}9 \cdot 0{,}2}{0{,}24} = \boxed{0{,}75}$

b) X = el paciente es leve

$X \sim B(8,\ 0{,}9)$

b1) $\boxed{P(X=4) = 0{,}0046}$ (mirando en la tabla)

Dicha probabilidad se puede calcular también usando la definición de la función masa de probabilidad:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

En nuestro caso:

$$P(X=4) = \binom{8}{4} 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^{8-4} = 0{,}0045927$$

b2) $P(X \leq 7) = 1 - P(X > 7) = 1 - P(X=8) =$

$= 1 - 0{,}4305 = \boxed{0{,}5695}$

Al igual que antes, la $P(X=8)$ se podría haber calculado con la función masa de probabilidad:

$$P(X=8) = \binom{8}{8} 0{,}9^8 \cdot 0{,}1^{8-8} = 0{,}43046721$$