

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** ejercicios, si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. a) [1,25 puntos] Determina razonadamente los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) [1,25 puntos] Calcula razonadamente todos los posibles valores x, y, z para que el producto de las matrices $C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ conmute.

2. a) [1,75 puntos] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax & -ay & -z & = & a \\ ax & -ay & & = & a \\ ax & +2y & -z & = & 1 \end{cases}.$$

- b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

3. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ \cos(\pi x) & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{\ln(x-2)}{3-x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- a) [1,5 puntos] Determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

- b) [1 punto] Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{-x}}{1 + 2x - \cos(x^2)}.$

4. Sea la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}.$

- a) [1,5 puntos] Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.

- b) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

5. a) [1,25 puntos] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1} dx.$

- b) [1,25 puntos] Calcula, justificadamente, el área acotada del recinto limitado por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$ y el eje de abscisas.

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Curso 2019/2020



Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** ejercicios, si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

6. Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda - \mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$.

- a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el ángulo que forman los dos planos.
 b) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente el volumen del tetraedro formado por el punto $P(3, -3, 2)$ y los puntos de corte del plano π_1 con los ejes coordenados.

7. Dados el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = -1 + \mu \\ y = 1 + \lambda + a\mu \\ z = 1 + 2\lambda - \mu \end{cases}$ y la recta $s \equiv \begin{cases} x - 2y = 1 - b \\ z = -3 \end{cases}$.

- a) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente el valor de los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano π .
 b) **[1 punto]** Si $a = 0$ y $b = 3$, calcula razonadamente la ecuación en forma implícita de la recta r que pasa por el punto $P(1, -1, -8)$ es paralela al plano π y perpendicular a la recta s .
8. a) En un servicio de emergencias el 60 % de los avisos que se reciben se clasifican con el código amarillo, el 30 % con el naranja y el 10 % con el rojo. Se sabe que el porcentaje de avisos recibidos que son falsas alarmas es 3 % en el caso de código amarillo, 2 % en el naranja y 1 % en el rojo. Si se recibe un aviso,
 a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que se trate de una falsa alarma?
 a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el aviso recibido no ha sido falsa alarma, ¿qué probabilidad hay de que haya sido un aviso código rojo o naranja?
 b) Si en una centralita se reciben 9 avisos,
 b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que la centralita reciba 2 o menos avisos naranjas?
 b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que todos los avisos sean amarillos o naranjas?

n	k \ p	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.33	0.35	0.40	0.45	0.49	0.50
9	0	0.9135	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0272	0.0207	0.0101	0.0046	0.0023	0.0020
	1	0.0830	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1206	0.1004	0.0605	0.0339	0.0202	0.0176
	2	0.0034	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2376	0.2162	0.1612	0.1110	0.0776	0.0703
	3	0.0001	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2731	0.2716	0.2508	0.2119	0.1739	0.1641
	4	0.0000	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2017	0.2194	0.2508	0.2600	0.2506	0.2461
	5	0.0000	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.0994	0.1181	0.1672	0.2128	0.2408	0.2461
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0326	0.0424	0.0743	0.1160	0.1542	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0069	0.0098	0.0212	0.0407	0.0635	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0008	0.0013	0.0035	0.0083	0.0153	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0016	0.0020

Julio de 2020

Cipri

$$\textcircled{1} a) A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A no tiene inversa $\Leftrightarrow |A| = 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{-aF_1+F_3 \\ -aF_1+F_4}} \begin{vmatrix} 1 & -a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ 0 & -a^2-a & -2a+1 & -a \\ 0 & -a^2-a & -2a+2 & -a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ -a^2-a & -2a+1 & -a \\ -a^2-a & -2a+2 & -a \end{vmatrix} = -2a(-2a+1) + a(-a^2-a)(-2a+2) -$$

$$-a(-a^2-a) - [a(-2a+1)(-a^2-a) - 2a(-2a+2) - a(-a^2-a)] =$$

$$= 4a^2 - 2a + (-a^3 - a^2)(-2a+2) + a^3 + a^2 -$$

$$- [(-2a^2+a)(-a^2-a) + 4a^2 - 4a + a^3 + a^2] =$$

$$= \cancel{4a^2} - 2a + \cancel{2a^4} - \cancel{2a^3} + \cancel{2a^3} - 2a^2 + \cancel{a^3} + \cancel{a^2} - \cancel{2a^4} - 2a^3 + a^3 + a^2 -$$

$$- \cancel{4a^2} + 4a - \cancel{a^3} - \cancel{a^2} = -a^3 - a^2 + 2a = a(-a^2 - a + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ -a^2-a+2=0 \Rightarrow a = \begin{cases} -2 \\ +1 \end{cases} \end{cases}$$

A no tiene inversa para $a = -2, 0, 1$

$$b) C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

C y D conmutan $\Leftrightarrow CD = DC$

$$CD = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+1 & x-1 \\ 3y+z & y-z \end{pmatrix}$$

$$DC = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y & z+3 \\ x-y & 1-z \end{pmatrix}$$

$$CD = DC \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x+1 & x-1 \\ 3y+z & y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y & z+3 \\ x-y & 1-z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x+1 = 3x+y \Rightarrow y=1 \\ x-1 = z+3 \\ 3y+z = x-y \\ y-z = 1-z \Rightarrow y=1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x-z=4 \\ -x+z=-4 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 3x+1 = 3x+y \\ x-1 = z+3 \\ 3y+z = x-y \\ y-z = 1-z \end{array}} \right\} \text{Iguales}$$

Llamamos $z = \lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{Entonces: } \left. \begin{array}{l} x = 4 + \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Soluciones } (x, y, z) = (4 + \lambda, 1, \lambda) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{para que } CD = DC \end{array} \right.$$

$$(2) \ a) \ A = \begin{pmatrix} a & -a & -1 \\ a & -a & 0 \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a & -a & -1 & a \\ a & -a & 0 & a \\ a & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rango de A

$$|A| = a^2 - 2a - a^2 - a^2 = -a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(-a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \end{cases}$$

• Si $a \neq \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \text{rango } A = 3 = \text{rango } (\tilde{A}) = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ (teorema de Rouché-Fröbenius) S.C.D.

• Si $\boxed{a=0} \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow \text{rg } A < 3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg } A = 2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg } \tilde{A} = 2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

• Si $\boxed{a=-2} \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow \text{rg } A < 3$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg } A = 2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-F_1+F_2 \\ -F_1+F_3}} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Cipri

$$\Rightarrow \text{rg } \tilde{A} = 3$$

Discusión:

Si $a \neq \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow \text{rg } A = 3 = \text{rg } \tilde{A} = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{S.C.D.}$

Si $a = 0 \Rightarrow \text{rg } A = \text{rg } \tilde{A} = 2 < \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{S.C.I.}$

Si $a = -2 \Rightarrow \text{rg } A = 2 \neq 3 = \text{rg } \tilde{A} \Rightarrow \text{S.I.}$

b) Si $a = 2$, el sistema es C.D.

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 2 \\ 2x - 2y = 2 \\ 2x + 2y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-F_1+F_2 \\ -F_1+F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{array} \right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

De [2]: $z = 0$

De [3]: $4y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}$

Sustituimos en [1]: $x = \frac{2+2y+z}{2} = \frac{2+2 \cdot (-\frac{1}{4})+0}{2} = \frac{3}{4}$

$$\text{Solución: } (x, y, z) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, 0 \right)$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-2} & x < 2 \\ \cos(\pi x) & 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{\ln(x-2)}{3-x} & x > 3 \end{cases}$$

Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio, por ser una función racional bien definida, una función trigonométrica y un cociente (que no hace cero el denominador), en el que el numerador está bien definido.

Continuidad en $x=2$: ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$?

Cipri

$$f(2) = \cos(2\pi) = 1 \quad (\text{la calculadora en radianes})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \cos(\pi x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow f \text{ no es continua en } x=2$$

f tiene una discontinuidad de salto infinito en $x=2$

Continuidad en $x=3$: ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$?

$$f(3) = \cos(3\pi) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} \cos(\pi x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\ln(x-2)}{3-x} = \left[\frac{0}{0} \right] \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\frac{1}{x-2}}{-1} = -1$$

L'Hôpital

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1 \Rightarrow f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \Rightarrow f \text{ es continua en } x=3$$

Conclusion: f es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$ y en $x=2$ presenta una discontinuidad de salto infinito.

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{-x}}{1+2x-\cos(x^2)} = \left[\frac{0}{0} \right] \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - x e^{-x}}{2 + \sin(x^2) \cdot 2x} = \frac{1}{2}$$

$$(4) \quad f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$$

$$\exists) \text{ Dom}(f) = \mathbb{R} \text{ ya que } x^2 + 1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2+1) - (x^2-2x+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (2x-2)(x^2+1) - (x^2-2x+1) \cdot 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{2x^3} + \cancel{2x} - 2x^2 - 2 - \cancel{2x^3} + 4x^2 - \cancel{2x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \quad (\text{posibles extremos relativos})$$

$$f''(x) = \frac{4x(x^2+1)^2 - (2x^2-2) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(1) > 0 \Rightarrow x=1 \text{ es un m\u00ednimo relativo de } f$$

$$f''(-1) < 0 \Rightarrow x=-1 \text{ es un m\u00e1ximo relativo de } f$$

Las coordenadas de los extremos relativos son:

$$(1, f(1)) = (1, 0) \text{ m\u00ednimo relativo de } f$$

$$(-1, f(-1)) = (-1, 2) \text{ m\u00e1ximo relativo de } f$$

b) Ec. de la recta tangente a f en $x=a$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

En nuestro caso: $y - f(0) = f'(0)x$

$$\boxed{y - 1 = -2x} \text{ Recta tangente a } f \text{ en } x=0$$

Ec. de la recta normal a f en $x=a$

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

En nuestro caso: $\boxed{y - 1 = \frac{1}{2}x}$ Recta normal a f en $x=0$

5) a) $\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1} dx$

Descomponemos $\frac{3x-2}{x^2-2x+1}$ en fracciones simples:

$$x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=1 \text{ (doble)}$$

$$\frac{3x-2}{x^2-2x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-2 = Ax - A + B \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ -2 = -A+B \end{cases} \Rightarrow B=1$$

$$\text{As\u00ed } \int \frac{3x-2}{x^2-2x+1} dx = \int \frac{3}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx =$$

$$= 3 \log|x-1| + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} = 3 \log|x-1| - \frac{1}{(x-1)} + C$$

donde $\log$ es el logaritmo natural.

$$b) g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$$

Cipri

$$g(x) = 0 \Rightarrow x(-x^2 + 2x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-1}^0 g(x) dx \right| + \left| \int_0^3 g(x) dx \right| = \left| \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_{-1}^0 \right| + \\ &+ \left| \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^3 \right| = |G(0) - G(-1)| + |G(3) - G(0)| = \\ &= \left| -\frac{7}{12} \right| + \left| \frac{45}{4} \right| = \frac{71}{6} u^2 \end{aligned}$$

$$\int g(x) dx = \int (-x^3 + 2x^2 + 3x) dx = -\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} = G(x)$$

$$G(0) = 0$$

$$G(-1) = -\frac{7}{12}$$

$$G(3) = \frac{45}{4}$$

$$\textcircled{6} a) \pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$$

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda - \mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

$$\vec{n}_{\pi_1} = (2, 1, 1)$$

$$\begin{aligned} \vec{n}_{\pi_2} &= \vec{u}_{\pi_2} \times \vec{v}_{\pi_2} = (1, -1, 2) \times (-1, 1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{k} - 2\vec{j} - \vec{k} - 2\vec{i} = -2\vec{i} - 2\vec{j} = (-2, -2, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \angle \{ \pi_1, \pi_2 \} &= \frac{|\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}|}{|\vec{n}_{\pi_1}| |\vec{n}_{\pi_2}|} = \frac{|-4 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2}} = \\ &= \frac{6}{\sqrt{6} \sqrt{8}} = \frac{6}{\sqrt{48}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha = \angle \{ \pi_1, \pi_2 \} = \arccos \frac{6}{\sqrt{48}} = 30^\circ}$$

$$b) V = \frac{1}{6} \left| \det(\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC}) \right|$$

Cipri

donde A, B y C son los puntos de corte de π_1 con los ejes coordenados

$$\left. \begin{array}{l} A: \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \\ \text{eje } OX: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \end{array} \right\} A(1,0,0) \\ B: \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \\ \text{eje } OY: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \end{array} \right\} B(0,2,0) \\ C: \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \\ \text{eje } OZ: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \end{array} \right\} C(0,0,2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{PA} = (1,0,0) - (3,-3,2) = (-2,3,-2) \\ \vec{PB} = (0,2,0) - (3,-3,2) = (-3,5,-2) \\ \vec{PC} = (0,0,2) - (3,-3,2) = (-3,3,0) \end{array}$$

$$\boxed{V = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} |-6| = 1 u^3}$$

$$\textcircled{7} a) S \subset \pi \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_s = 0 \\ P_s \in \pi \quad \forall P_s \in S \end{cases}$$

De otra forma al final

$$S \equiv \begin{cases} x - 2y = 1 - b \\ z = -3 \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 1 - b + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -3 \end{cases} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\vec{n}_\pi = \vec{u}_\pi \times \vec{v}_\pi = (0,1,2) \times (1,2,-1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} - 2a\vec{i} = (-2a-1, 2, -1)$$

$$\vec{u}_s = (2, 1, 0)$$

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_s = 0 \Rightarrow 2(-2a-1) + 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$P_s(1-b, 0, -3) \in \pi \Leftrightarrow \begin{cases} 1-b = -1+\mu \\ 0 = 1+\lambda \Rightarrow \lambda = -1 \\ -3 = 1+2\lambda-\mu \end{cases} \begin{array}{l} \swarrow \\ -3 = 1-2-\mu \Rightarrow \mu = 2 \end{array}$$

Sustituyendo en la 1ª ecuación:

$$b = 1 + 1 - 2 = 0$$

$$\boxed{S: (a,b) = (0,0) \Rightarrow S \subset \pi}$$

$$b) \vec{n}_\pi = (-1-2a, 2, -1) = (-1, 2, -1)$$

Cipri

$$\vec{u}_s = (2, 1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} r \parallel \pi \Rightarrow \vec{u}_r \perp \vec{n}_\pi \\ r \perp s \Rightarrow \vec{u}_r \perp \vec{u}_s \end{array} \right\} \vec{u}_r = \vec{n}_\pi \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\vec{k} - 2\vec{j} - 4\vec{k} + \vec{i} = (1, -2, -5)$$

$$\Gamma \equiv \{P, \vec{u}_r\} \equiv \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = -1 - 2\beta \\ z = -8 - 5\beta \end{cases} \text{ con } \beta \in \mathbb{R}$$

De otra forma
al final

$$\Gamma \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+8}{-5}$$

$$\Gamma \equiv \begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} \Rightarrow -2x+2 = y+1 \Rightarrow -2x-y = -1 \\ \frac{y+1}{-2} = \frac{z+8}{-5} \Rightarrow -5y-5 = -2z-16 \Rightarrow -5y+2z = -11 \end{cases}$$

$$\Gamma \equiv \begin{cases} -2x-y = -1 \\ -5y+2z = -11 \end{cases} \text{ Ec. implícita}$$

8 a) $\left. \begin{array}{l} A = \text{aviso} \text{ \& } \text{código amarillo} \\ N = \text{ " " " naranja} \\ R = \text{ " " " rojo} \end{array} \right\} \begin{array}{l} F = \text{falsa alarma} \\ \bar{F} = \text{no hay falsa alarma} \end{array}$

$$A_{0,6} \begin{cases} F_{0,03} \\ \bar{F}_{0,97} \end{cases}$$

$$a_1) \overline{P(F)} = P(A)P(F/A) + P(N)P(F/N) + P(R)P(F/R) =$$

$$= 0,6 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,1 \cdot 0,01 = 0,025$$

$$N_{0,3} \begin{cases} F_{0,02} \\ \bar{F}_{0,98} \end{cases}$$

$$a_2) \overline{P(RUN/\bar{F})} = \frac{P[(RUN) \cap \bar{F}]}{P(\bar{F})} =$$

$$= \frac{P(N)P(\bar{F}/N) + P(R)P(\bar{F}/R)}{1 - P(F)} =$$

$$R_{0,1} \begin{cases} F_{0,01} \\ \bar{F}_{0,99} \end{cases}$$

$$= \frac{0,3 \cdot 0,98 + 0,1 \cdot 0,99}{1 - 0,025} = 0,4031$$

b) $X = \text{n}^\circ \text{ de avisos naranjas en la centralita}$

Cipri

$$X \sim B(9, 0,3)$$

$$b_1) \boxed{P(X \leq 2) = P(X=2) + P(X=1) + P(X=0) = 0,2668 + 0,1556 + 0,0404 = 0,4628}$$

b2) $Y = \text{n}^\circ \text{ de avisos rojos en la centralita}$

$$Y \sim B(9, 0,1)$$

$$\boxed{P(\text{Avisos amarillos o naranjas}) = P(Y=0) = 0,3874}$$

(7) a) Mediante rangos (tiene que ser $\text{rango } M = 2 = \text{rango } \tilde{M}$)

$$\pi \equiv \begin{cases} x = -1 + u \\ y = 1 + \lambda + u \\ z = 1 + 2\lambda - u \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 1 \\ y-1 & 1 & 1 \\ z-1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv (-2a-1)x + 2y - z = 2 + 2a$$

Formamos las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2a-1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ -2a-1 & 2 & -1 & 2+2a \end{pmatrix}$$

Si $\text{rango } M = 2 = \text{rango } \tilde{M} < 3 = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas}$, entonces por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado.

Rango de M

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2a-1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\text{Para } a=0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango } M = 2$$

Rango de $\tilde{M}$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$$

Conclusión

Para $a=0$ y $b=0$, $\text{rango } M = 2 = \text{rango } \tilde{M} \neq 3 = n^{\circ} \text{ de incógnitas}$, luego por el t° de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado, y, como consecuencia, $S \subset \mathbb{R}^3$.

$$b) [1] \quad r \parallel \pi \Rightarrow r \subset \pi' (\text{plano}) \text{ t.q. } \left\{ \begin{array}{l} \pi' \parallel \pi \\ P \in \pi' \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} [2] \quad r \perp s \Rightarrow r \subset \pi'' (\text{plano}) \text{ t.q. } \left\{ \begin{array}{l} P \in \pi'' \\ \vec{u}_r = \vec{n}_{\pi''} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad r \equiv \pi' \cap \pi''$$

$$[1] \quad \left. \begin{array}{l} \pi' \equiv -x + 2y - z = D' \\ P(1, -1, -8) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow D' = 5 \Rightarrow \pi' \equiv -x + 2y - z = 5$$

$$[2] \quad \vec{u}_r = \vec{n}_{\pi''} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} = (-2, -1, 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi'' \equiv -2x - y = D'' \\ P(1, -1, -8) \in \pi'' \end{array} \right\} \Rightarrow D'' = -1 \Rightarrow \pi'' \equiv -2x - y = -1$$

Por tanto: $\boxed{r \equiv \begin{cases} -x + 2y - z = 5 \\ -2x - y = -1 \end{cases}}$

¡Importante! Las ecuaciones implícitas de una recta no son únicas.