

**Instrucciones:** El estudiante deberá resolver **CUATRO** de los ocho ejercicios propuestos, si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- a) [1 punto] Calcula razonadamente la matriz inversa de  $A$ .
- b) [1,5 puntos] Calcula razonadamente la matriz  $X$  de la ecuación matricial  $AX + I_3 = BC$ , donde  $I_3$  es la matriz identidad.
2. a) [1,75 puntos] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} x & +2y & +az & = & a \\ x & +ay & +2z & = & a \\ -x & +y & +z & = & 1 \end{cases}.$$

- b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para  $a = 2$ , si es posible.
3. a) [1 punto] Calcula razonadamente el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(2x)} \right)$ .
- b) [1,5 puntos] Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2^{(x-1)} & \text{si } x \leq 1 \\ x - 2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ \ln(x - 1) & \text{si } x \geq 2 \end{cases},$$

donde  $\ln$  es el logaritmo neperiano, estudia la continuidad de la función  $f(x)$  en  $x = 1$  y en  $x = 2$ , y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

4. a) [1,5 puntos] Calcula las dimensiones de una caja de base cuadrada (prisma cuadrangular) sin tapa superior y con un volumen de  $108 \text{ dm}^3$  para que la superficie total de la caja (formada por las caras laterales y la base) sea mínima.
- b) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función  $f(x) = x^2 + x - 1$  en el punto de abscisa  $x = 1$ .
5. a) [1,25 punto] Calcula razonadamente la siguiente integral:  $\int \frac{-dx}{1 + e^x}$ .  
(Cambio de variable sugerido:  $e^x = t$ .)
- b) [1,25 puntos] Determina justificadamente el área acotada que encierran las gráficas de las funciones  $f(x) = -x^2 + 2x + 4$  y  $g(x) = x + 2$ .

6. Sean el plano  $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$  y la recta  $r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$ .
- a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la distancia del punto  $P(1, 2, -1)$  al plano  $\pi$ .
- b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente el área del triángulo que forman el punto intersección de la recta  $r$  con el plano  $\pi$ , y los puntos  $B(1, -1, 2)$  y  $C(0, 1, 1)$ .
7. Dadas las rectas  $r \equiv \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$ ,  $s \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1}$  y el punto  $P(-1, 0, 2)$ .
- a) **[1,25 puntos]** Determina razonadamente la posición relativa de las rectas  $r$  y  $s$ .
- b) **[1,25 puntos]** Halla razonadamente la ecuación general del plano que pasa por el punto  $P$  y es paralelo a las rectas  $r$  y  $s$ .
8. a) El 70 % de los usuarios de instagram tiene menos de 34 años, el 25 % entre 34 y 54 años (ambos incluidos) y el 5 % más de 54 años. Se sabe que acceden a diario a dicha red: el 98 % de los menores de 34 años, el 40 % de los usuarios entre 34 y 54 años (ambos incluidos) y el 10 % de los mayores de 54 años. Si se selecciona un usuario al azar:
- a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que no acceda a diario a dicha red social?
- a.2) **[0,75 puntos]** Si el usuario seleccionado al azar confiesa que accede diariamente, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca al grupo que tiene entre 34 y 54 años (ambos incluidos)?
- b) El tiempo que un usuario de la red instagram pasa conectado a diario a dicha red social sigue una ley normal de media 53 minutos y desviación típica 10 minutos.
- b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que un usuario seleccionado al azar se conecte más de 30 minutos al día?
- b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué porcentaje de usuarios (tanto por ciento) se conectan entre 40 y 67 minutos al día?

| a          | 0.00     | 0.01     | 0.02     | 0.03     | 0.04     | 0.05     | 0.06     | 0.07     | 0.08     | 0.09     |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <b>1.3</b> | 0.9032   | 0.9049   | 0.9066   | 0.9082   | 0.9099   | 0.9115   | 0.9131   | 0.9147   | 0.9162   | 0.9177   |
| <b>1.4</b> | 0.9192   | 0.9207   | 0.9222   | 0.9236   | 0.9251   | 0.9265   | 0.9279   | 0.9292   | 0.9306   | 0.9319   |
| $\vdots$   | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| <b>2.2</b> | 0.9861   | 0.9864   | 0.9868   | 0.9871   | 0.9875   | 0.9878   | 0.9881   | 0.9884   | 0.9887   | 0.9890   |
| <b>2.3</b> | 0.9893   | 0.9896   | 0.9898   | 0.9901   | 0.9904   | 0.9906   | 0.9909   | 0.9911   | 0.9913   | 0.9916   |
| <b>2.4</b> | 0.9918   | 0.9920   | 0.9922   | 0.9925   | 0.9927   | 0.9929   | 0.9931   | 0.9932   | 0.9934   | 0.9936   |

①  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

a)  $A^{-1}$

$$(A|I) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\bar{r}_1 \leftrightarrow \bar{r}_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\bar{r}_2 + \bar{r}_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{-\bar{r}_3 + \bar{r}_2 \\ 2\bar{r}_3 + \bar{r}_1}]{\substack{-\bar{r}_3 + \bar{r}_2 \\ 2\bar{r}_3 + \bar{r}_1}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)  $A\bar{x} + I = BC$

$A\bar{x} = BC - I$

$A^{-1}A\bar{x} = A^{-1}(BC - I)$

$\boxed{\bar{x} = A^{-1}(BC - I)}$

$BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$BC - I = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\bar{x} = A^{-1}(BC - I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$

② a)  $\begin{cases} x + 2y + az = a \\ x + ay + 2z = a \\ -x + y + z = 1 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & a \\ 1 & a & 2 & a \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Rango de A

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + a - 4 + a^2 - 2 - 2 = a^2 + 2a - 8 = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow a = \begin{cases} -4 \\ 2 \end{cases}$

Rango de  $\tilde{A}$

Cipri

$$\boxed{a = -4} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 1 & -4 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-F_1 + F_2 \\ F_1 + F_3}]{\quad} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_3 + F_2}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } \tilde{A} = 3 \text{ y } \text{rango } A = 2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\boxed{a = 2} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2 + F_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } \tilde{A} = 2 = \text{rango } A$$

Discusión:

Si  $a \neq \begin{Bmatrix} -4 \\ 2 \end{Bmatrix}$ , entonces  $\text{rango } A = 3 = \text{rango } \tilde{A} = n^{\circ} \text{ incógnitas} \Rightarrow$

$\Rightarrow$  (teorema de Rouché-Fröbenius) S.C.D.

Si  $a = -4 \Rightarrow \text{rango } A = 2 < 3 = \text{rango } \tilde{A} \Rightarrow$  (t. de Rouché-Fröbenius) S.I.

Si  $a = 2 \Rightarrow \text{rango } A = 2 = \text{rango } \tilde{A} < 3 \Rightarrow$  (t. de Rouché-Fröbenius) S.C.I.

$$b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2 + F_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} [1] \\ [2] \end{matrix}$$

Llamamos  $z = \lambda \in \mathbb{R}$

De [1]:  $y + \lambda = 1 \Rightarrow y = 1 - \lambda$

Sustituyendo en [2]:  $x = 1 - (1 - \lambda) - \lambda = 0$

Soluciones:  $(x, y, z) = (0, 1 - \lambda, \lambda)$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\textcircled{3} \quad a) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(2x)} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x) - x}{x \sin(2x)} = \left[ \frac{0}{0} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(2x) \cdot 2 - 1}{1 \cdot \sin(2x) + x \cdot \cos(2x) \cdot 2} = +\infty$$

↑  
regla de L'Hôpital

$$b) f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} & x \leq 1 \\ x-2 & 1 < x < 2 \\ \ln(x-1) & x \geq 2 \end{cases}$$

Continuidad en  $x=1$  : ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ ?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} 2^{x-1} = 2^0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow \boxed{f \text{ tiene en } x=1}$$

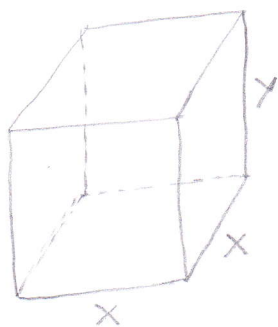
una discontinuidad (no evitable) de salto finito  $1 - (-1) = 2$

Continuidad en  $x=2$  : ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ ?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-1) = \ln 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \\ f(2) = \ln 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f \text{ es continua en } x=2}$$

4) a)



Planteamiento:  $\begin{cases} x^2 y = 108 \\ S = x^2 + 4xy \end{cases}$

Como  $x^2 y = 108 \Rightarrow y = \frac{108}{x^2}$

y sustituyendo

$$S = x^2 + 4x \frac{108}{x^2} = x^2 + \frac{432}{x} = f(x)$$

Hay que minimizar  $f(x)$ :

$$f'(x) = 2x - \frac{432}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{432}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 432 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{432}{2}} = 6 \quad (\text{posible extremo relativo})$$

$$f''(x) = 2 + \frac{432 \cdot 2x}{x^4}$$

$$f''(6) > 0 \Rightarrow x=6 \text{ es un m\u00ednimo relativo de } f$$

Las dimensiones de la caja son  $6 \times 6 \times \frac{108}{6^2} = 6 \times 6 \times 3 \text{ dm}$  Cipri

b) Recta tangente a  $y = f(x)$  en  $x = a$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

En nuestro caso  $a = 1$  y  $f(x) = x^2 + x - 1$ .

$$f(1) = 1$$

$$f'(x) = 2x + 1 \rightarrow f'(1) = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f'(x) = 2x + 1 \rightarrow f'(1) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{y - 1 = 3(x - 1) \text{ recta tangente a } f(x) \text{ en } x = 1}$$

5) a)  $\int \frac{-dx}{1+e^x} = \left[ \begin{array}{l} t = e^x \\ x = \log t \rightarrow dx = \frac{1}{t} dt \end{array} \right] = \int \frac{-dt}{(1+t)t} \quad \text{①}$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-1}{(1+t)t} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t} = \frac{At + B(1+t)}{(1+t)t} \Rightarrow At + B(1+t) = -1$$

Para  $t = -1$ :  $-A = -1 \Rightarrow A = 1$

$t = 0$ :  $B = -1$

Así:  $\frac{-1}{(1+t)t} = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{t}$

y, por tanto:

$$\text{①} \int \frac{dt}{1+t} - \int \frac{dt}{t} = \log|1+t| - \log|t| = \log|1+e^x| - \log|e^x| + C$$

b) Calculamos los puntos de corte de  $f$  y  $g$ :

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 + 2x + 4 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Calculamos el área pedida:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-1}^2 (f(x) - g(x)) dx \right| = \left| \int_{-1}^2 [(-x^2 + 2x + 4) - (x + 2)] dx \right| = \\ &= \left| \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx \right| = \left| \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 \right| = \end{aligned}$$

$$= \left| \left( -\frac{8}{3} + 2 + 4 \right) - \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) \right| = \frac{9}{2} u^2$$

$$(6) \quad \pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0, \quad r \equiv \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

a)  $P(1, 2, -1)$ ,  $d(P, \pi)$ ?

$$d(P, \pi) = \frac{|1 + 2 \cdot 2 - (-1) - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3} u$$

b) Sea A el punto de intersección de  $r$  y  $\pi$

$$A \equiv \begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_1 + F_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{4F_3 + F_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array} \right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

De [3]:  $z = -2$

Sustituimos en [2]:  $y = \frac{-2+2}{-4} = 0$

Sustituimos en [1]:  $x = 2$

El área del triángulo es:

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \left\| \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\| =$$

$$\vec{AB} = (-1, -1, 4) \quad = \frac{1}{2} \|(-7, -5, -3)\| = \frac{1}{2} \sqrt{(-7)^2 + (-5)^2 + (-3)^2} =$$

$$\vec{AC} = (-2, 1, 3) \quad = \frac{1}{2} \sqrt{83} = \frac{\sqrt{83}}{2} u^2$$

$$(7) \quad a) \quad r \equiv \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1} \equiv \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y+2}{-2} \\ \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1} \end{cases} \equiv \begin{cases} 2x + 3y = -6 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Estudiamos los rangos de  $M$  y  $\tilde{M}$ :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_1 + F_3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } M = 3$$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_1 + F_3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } \tilde{M} = 4$$

Como  $\text{rango } M = 3$  y  $\text{rango } \tilde{M} = 4 \Rightarrow$  r y s se cruzan

b)  $\pi \equiv \begin{cases} P(-1, 0, 2) \\ \vec{u}_r = (-2, -2, 0) \\ \vec{u}_s = (3, -2, 1) \end{cases}$  ya que  $\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} = (-2, -2, 0)$

$$\pi \equiv \det \begin{pmatrix} x+1 & -2 & 3 \\ y & -2 & -2 \\ z-2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2x + 2y + 10z - 22 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv -x + y + 5z = 11$$

- 8) a) A = usuario de menos de 34 años  
 B = " " entre 34 y 54 años  
 C = " " más de 54 años  
 D = el usuario se conecta a diario

$$A_{0,7} \begin{cases} D_{0,98} \\ \bar{D}_{0,02} \end{cases}$$

$$B_{0,25} \begin{cases} D_{0,4} \\ \bar{D}_{0,6} \end{cases}$$

$$C_{0,05} \begin{cases} D_{0,4} \\ \bar{D}_{0,9} \end{cases}$$

$$a_1) \boxed{P(\bar{D})} = P(A)P(\bar{D}/A) + P(B)P(\bar{D}/B) + P(C)P(\bar{D}/C) = 0,7 \cdot 0,02 + 0,25 \cdot 0,6 + 0,05 \cdot 0,9 = 0,209$$

$$a_2) \boxed{P(B/D)} = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B)P(D/B)}{1 - P(\bar{D})} = \frac{0,25 \cdot 0,4}{1 - 0,209} = 0,1264$$

- b)  $\Sigma$  = tiempo que un usuario de Insta pase conectado (a diario)  
 $\Sigma \sim N(53, 10)$

$$b_1) \boxed{P(X \geq 30) = P\left(Z \geq \frac{30-53}{10}\right) = P(Z \geq -2,3) = P(Z \leq 2,3) = 0,9893}$$

$$b_2) P(40 \leq X \leq 67) = P\left(\frac{40-53}{10} \leq Z \leq \frac{67-53}{10}\right) = P(-1,3 \leq Z \leq 1,4) = P(Z \leq 1,4) - P(Z \leq -1,3) = P(Z \leq 1,4) - (1 - P(Z \leq 1,3)) = 0,9192 - (1 - 0,9032) = 0,8224$$

El 82,24% de los usuarios se conectan entre 40 y 67 minutos.