

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

PROPUESTA A

1A. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + bx - 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- a) Calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$. **(1,5 puntos)**
 b) Enuncia el teorema de Rolle y comprueba si, para los valores hallados en el apartado anterior, la función $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema en el intervalo $[-2, 6]$. **(1 punto)**

2A. Con una chapa metálica de 8×5 metros se desea construir, cortando cuadrados en las esquinas, un cajón sin tapa de volumen máximo. Halla razonadamente las dimensiones de dicho cajón. **(2,5 puntos)**

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{rrcr} ax & - & y & + & z & = & a - 4 \\ 2x & + & y & - & az & = & a - 1 \\ & & y & - & z & = & -3 \end{array} \right\} \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = -1$. **(1 punto)**

4A. Dado el punto $P(2, 0, -1)$ y las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 4 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$$

- a) Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s . **(1,5 puntos)**
 b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por P es paralelo a r y a s . **(1 punto)**

5A. a) Los operarios A, B y C producen, respectivamente, el 50 %, el 30 % y el 20 % de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6 % de las resistencias producidas por A, el 5 % de las producidas por B y el 3 % de las producidas por C. Se selecciona al azar una resistencia:

- a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuosa. **(0,75 puntos)**
 a2) Si es defectuosa, calcula razonadamente la probabilidad de que proceda del operario A. **(0,5 puntos)**

b) Las resistencias se empaquetan al azar en cajas de cinco unidades. Calcula razonadamente la probabilidad de:

- b1) Que en una caja haya exactamente tres resistencias fabricadas por B. **(0,75 puntos)**
 b2) Que en una caja haya al menos dos fabricadas por B. **(0,5 puntos)**

n	k	P												
		0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Propuesta A

$$\boxed{1A.} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x \leq 2 \\ -x^2 + bx - 9 & x > 2 \end{cases}$$

a) Si $f(x)$ es derivable, tiene que ser continua, luego estudiamos la continuidad en $x=2$ ya que cada uno de los trozos es continuo en su dominio (por ser funciones polinómicas).

Continuidad en $x=2$: ¿ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + a) = 4 + a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + bx - 9) = 2b - 13 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 + a = 2b - 13 \text{ para que } f \text{ sea continua en } x=2$$

Estudiamos la derivabilidad:

Cada una de las funciones componentes es derivable en su dominio, por ser funciones polinómicas, luego hay que ver la derivabilidad en $x=2$.

Derivabilidad en $x=2$: ¿ $\exists f'(2)$?

$$f'(2) \left\{ \begin{array}{l} f'_-(x) = 2x \rightarrow f'_-(2) = 4 \\ f'_+(x) = -2x + b \rightarrow f'_+(2) = -4 + b \end{array} \right\} \Rightarrow 4 = -4 + b \Rightarrow b = 8 \text{ para que } f \text{ sea derivable en } x=2.$$

Resolvemos el sistema

$$\left. \begin{array}{l} 4 + a = 2b - 13 \\ b = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 2 \cdot 8 - 13 - 4 = -1$$

Conclusión: para $(a, b) = (-1, 8)$, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$.

b) Teorema de Rolle:

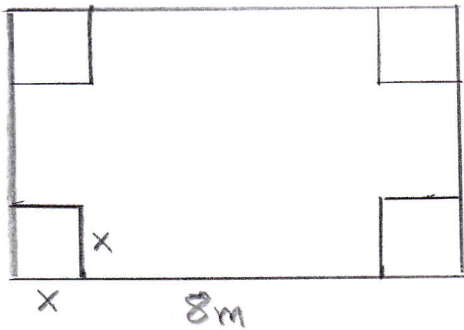
Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y tal que $f(a) = f(b)$, entonces $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 2 \\ -x^2 + 8x - 9 & x > 2 \end{cases}$$

La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}$, luego en Cipri particular es continua en $[-2, 6]$ y derivable en $(-2, 6)$. Además,

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= (-2)^2 - 1 = 3 \\ f(6) &= -6^2 + 8 \cdot 6 - 9 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\text{aplicando el t}^\circ \text{ de Rolle}) \exists c \in (-2, 6) \text{ tal que } f'(c) = 0$$

2A.



$$\begin{aligned} V(x) &= (8-2x)(5-2x)x = \\ &= (40-16x-10x+4x^2)x = \\ &= 40x-26x^2+4x^3 \end{aligned}$$

$$V'(x) = 40 - 52x + 12x^2$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 40 - 52x + 12x^2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 10/3 \\ 1 \end{cases}$$

$$V''(x) = -52 + 24x$$

$$V''(10/3) = 7 > 0$$

$$V''(1) = -7 < 0 \Rightarrow x = 1 \text{ es un m\u00e1ximo relativo de } V(x)$$

Por tanto, las dimensiones del caj\u00f3n son: 6 x 3 x 1 m

3A.

$$a) \begin{cases} 2x - y + z = a - 4 \\ 2x + y - az = a - 1 \\ y - z = -3 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -a + 2 + a^2 - 2 = a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Veamos lo que pasa para $a = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array} \right) \quad \& \quad \left| \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{array} \right| \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \text{rango } A = 2 \neq 3 = \text{rango}(A|b) \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$

Y para $\boxed{a=1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & +6 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{-3F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \text{rango } A = 2 \neq \text{rango}(A|b) = 3$$

Discusión

Si $a \neq \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, el sistema es compatible determinado, ya que
 $\text{rango } A = 3 = \text{rango}(A|b) = \text{n.º de incógnitas}$

Si $a = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, el sistema es incompatible.

b) Resolución para $a = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & -12 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -15 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

$$\text{De } [3]: z = -\frac{15}{2}$$

$$\text{Sustituimos en } [2]: -y + 3z = -12 \Rightarrow y = 3 \cdot \left(-\frac{15}{2}\right) + 12 = -\frac{21}{2}$$

$$\text{Sustituimos en } [1]: -x - y + z = -5 \Rightarrow x = -\left(-\frac{21}{2}\right) + \left(-\frac{15}{2}\right) + 5 = 8$$

$$\boxed{\text{Solución } (x, y, z) = \left(8, -\frac{21}{2}, -\frac{15}{2}\right)}$$

$$\boxed{4A.} \quad r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 2, 0) \\ A(2, -1, 0) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 4 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 - z \end{cases} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \end{matrix} \quad -1 - z - y + 2z + 4 = 0 \Rightarrow y = 3 + z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -1 - \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = \mu \end{cases} \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 1, 1) \\ A'(-1, 3, 0) \end{cases}$$

Consideramos

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1-(-1) \\ 2 & 1 & 3-(-1) \\ 0 & 1 & 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango } M = 2$

$$|M| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } \tilde{M} = 3$$

$\Rightarrow$ r y s se cruzan

b) El vector normal de π es $\perp$ a r y s, y por tanto, consideramos

$$\vec{n}_{\pi} = \vec{u}_r \times \vec{u}_s$$

El vector $\vec{PG}$, donde G es un punto genérico del plano, es perpendicular al vector director hallado y, como consecuencia, su producto escalar es nulo.

Así,

$$\pi \equiv \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 2, 0) \\ \vec{u}_s = (-1, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\vec{PG} = (x, y, z) - (2, 0, -1) = (x-2, y, z+1)$$

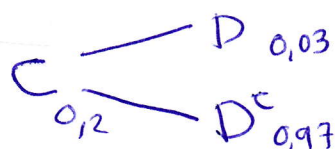
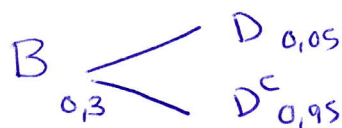
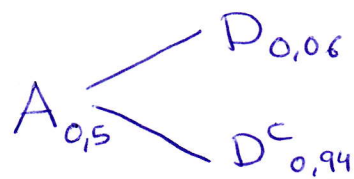
$$\Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(x-2) - (z+1) + 2(z+1) + y = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv 2x + y + z - 3 = 0}$$

5A. 2) Llamamos A = operario A, B = operario B, C = operario C y D = resistencia defectuosa ($\Rightarrow D^c$ = resistencia no defectuosa)

Se tiene que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,3$, $P(C) = 0,2$

21)



Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$\boxed{P(D)} = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) =$$

$$= 0,5 \cdot 0,06 + 0,3 \cdot 0,05 + 0,2 \cdot 0,03 = \boxed{0,051}$$

a2) Aplicando el teorema de Bayes:

Cipri

$$\boxed{P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D/A)}{P(D)} =}$$
$$= \frac{0,5 \cdot 0,06}{0,051} = 0,5882352941 \approx \boxed{0,59}$$

b) b1) X = n° de resistencias fabricadas por B

$$X \sim \text{TB}(5, 0,3)$$

$$\boxed{P(X=3) = \binom{5}{3} 0,3^3 0,7^2 = 0,1323}$$

no hace falta

$$\begin{aligned} \text{b2) } \boxed{P(X \geq 2)} &= P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = \\ &= 1 - [P(X=0) + P(X=1)] = \\ &= 1 - [0,1681 + 0,3602] = \boxed{0,4717} \end{aligned}$$



Evaluación para Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2017

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

PROPUESTA B

1B. Calcula razonadamente los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x+1)}{2 - 2 \cos x} \quad (1,25 \text{ puntos por límite})$$

Nota: $\ln$ denota logaritmo neperiano.

2B. Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x - 4$

- a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por sus gráficas. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de $g(x)$ en el punto de abscisa $x = -3$. **(1 punto)**

3B. Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) ¿Tiene inversa la matriz $2I_3 + B$? Razona la respuesta. I_3 es la matriz identidad de orden 3. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $2X + C = A - X \cdot B$. **(1,5 puntos)**

4B. a) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta, en su forma general o implícita, que contiene a los puntos $P(0, 1, -2)$ y $Q(4, -3, 0)$. **(1 punto)**

b) Encuentra razonadamente un punto que equidiste de P y Q y que pertenezca a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -5 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1,5 \text{ puntos})$$

5B. a) En mi casa dispongo de dos estanterías A y B. En A tengo 20 novelas, 10 ensayos y 10 libros de matemáticas y en la B tengo 12 novelas y 8 libros de matemáticas. Elijo una estantería al azar y de ella, también al azar, un libro. Calcula razonadamente la probabilidad de que:

- a1) El libro elegido sea de matemáticas. **(0,75 puntos)**
a2) Si el libro elegido resultó ser de matemáticas, que fuera de la estantería B. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo de espera en una parada de autobús se distribuye según una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

- b1) Calcula razonadamente la probabilidad de esperar menos de 13 minutos. **(0,75 puntos)**
b2) ¿Cuántos minutos de espera son superados por el 33 % de los usuarios? Razona la respuesta. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

Propuesta B

1B. a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} = \left[\frac{0}{0} \right]$

1ª forma: sin usar L'Hôpital

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & 0 & -4 \\ -2 & & -2 & -2 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & & -2 & 2 & \\ \hline & 1 & -1 & 0 & \end{array} \quad x^3 + 3x^2 - 4 = (x+2)^2(x-1)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 5 & 8 & 4 \\ -2 & & -2 & -6 & -4 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & & -2 & -2 & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & \end{array} \quad x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x+2)^2(x+1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)^2(x-1)}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{-3}{-1} = 3$$

2ª forma: aplicando la regla de L'Hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 6x}{3x^2 + 10x + 8} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{6x + 6}{6x + 10} = \frac{-6}{-2} = 3 \end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x+1)}{2 - 2 \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) + x \frac{1}{x+1}}{2 \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} + x \frac{-1}{(x+1)^2}}{2 \cos x} = 1$$

2B.

a) $y = -x^2$

x	0	1	2	-1	-2
y	0	-1	-4	-1	-4

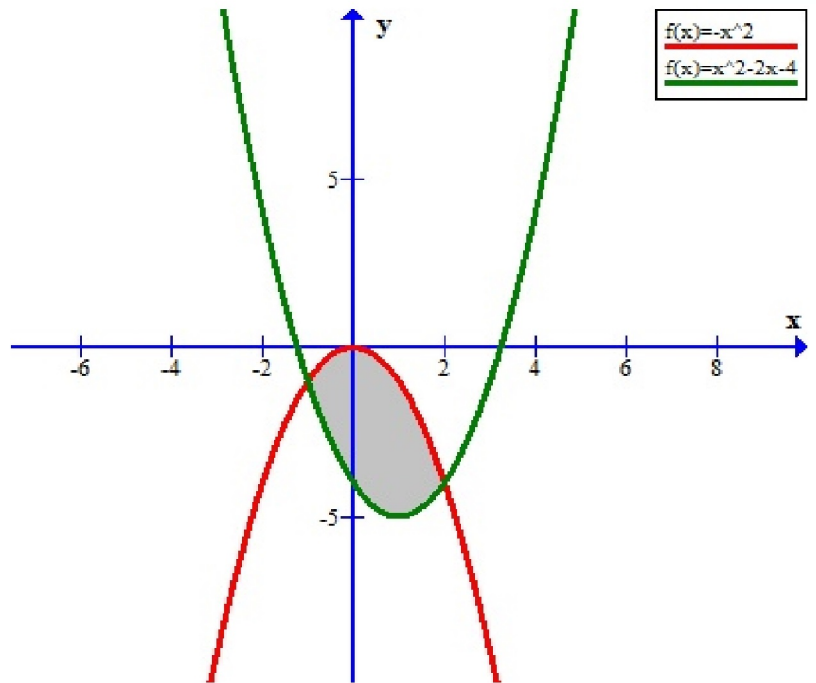
$$y = x^2 - 2x - 4$$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} V(1, -5)$$

$$y_v = 1^2 - 2 \cdot 1 - 4 = -5$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x = \begin{cases} 1 - \sqrt{5} \approx -1,2 \\ 1 + \sqrt{5} \approx 3,2 \end{cases}$$



$$\begin{array}{l} f(x) = -x^2 \\ f(x) = x^2 - 2x - 4 \end{array}$$

Puntos de corte entre las funciones

$$-x^2 = x^2 - 2x - 4 \Rightarrow 0 = 2x^2 - 2x - 4 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Área

$$A = \int_{-1}^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^2 (-x^2 - x^2 + 2x + 4) dx =$$

$$= \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \Big|_{-1}^2 =$$

$$= \frac{20}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = 9 \text{ u}^2$$

b) $x_0 = -3$

La ec. de la recta normal a $g(x)$ en x_0 es:

$$y - g(x_0) = -\frac{1}{g'(x_0)}(x - x_0)$$

$$g(x_0) = g(-3) = 11$$

$$g'(x) = 2x - 2$$

$$g'(-3) = -8$$

$$y - 11 = -\frac{1}{-8}(x - (-3))$$

$$y - 11 = \frac{1}{8}x + \frac{3}{8}$$

3B.

Cipri

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) $2I_3 + B$ tiene inversa $\Leftrightarrow |2I_3 + B| \neq 0$

$$2I_3 + B = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|2I_3 + B| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right| = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\exists (2I_3 + B)^{-1}}$$

b) $2X + C = A - XB$

$$2X + XB = A - C \Rightarrow 2XI + XB = A - C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(2I + B) = A - C \Rightarrow X(2I + B)(2I + B)^{-1} = (A - C)(2I + B)^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{X = (A - C)(2I + B)^{-1}}$$

Calculamos $A - C$

$$A - C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos $(2I + B)^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[-F_1 + F_3]{-2F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{2F_3 + F_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_3 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Calculamos X

$$\boxed{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{4B.} \quad a) \left. \begin{array}{l} P(0,1,-2) \\ Q(4,-3,0) \end{array} \right\} S \equiv \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (4,-3,0) - (0,1,-2) = (4,-4,2) \\ P(0,1,-2) \end{cases}$$

$$S \equiv \frac{x-4}{0} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{-2} \Rightarrow S \equiv \begin{cases} x-4=0 \\ -2y-8=z-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S \equiv \begin{cases} x-4=0 \\ 2y+z+6=0 \end{cases}} \text{ Ec. implícita}$$

b) $d(R,P) = d(R,Q)$ donde $R \in \Gamma$ es un punto genérico, luego

$$|\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{QR}| \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{PR} = (2+\lambda, -\lambda, -5) - (0,1,-2) = (2+\lambda, -\lambda-1, -3) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{QR} = (2+\lambda, -\lambda, -5) - (4,-3,0) = (-2+\lambda, 3-\lambda, -5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\overrightarrow{PR}| = \sqrt{(2+\lambda)^2 + (-\lambda-1)^2 + (-3)^2} \\ |\overrightarrow{QR}| = \sqrt{(-2+\lambda)^2 + (3-\lambda)^2 + (-5)^2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(2+\lambda)^2 + (-\lambda-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{(-2+\lambda)^2 + (3-\lambda)^2 + (-5)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2+\lambda)^2 + (-\lambda-1)^2 + (-3)^2 = (-2+\lambda)^2 + (3-\lambda)^2 + (-5)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4+4\lambda+\lambda^2+1+2\lambda+\lambda^2+9 = 4-4\lambda+\lambda^2+9-6\lambda+\lambda^2+25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\lambda = 24 \Rightarrow \lambda = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

$$\Gamma \equiv \begin{cases} x = 2 + \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = -5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{R\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}, -5\right)}$$

5B. $A = \text{libro de la estantería A} \rightarrow P(A) = 0,5$

a) $B = \text{" " " " B} \rightarrow P(B) = 0,5$

$N_A = \text{novela de la estantería A} \rightarrow P(N_A) = \frac{20}{20+10+10} = \frac{1}{2} = 0,5$

$E_A = \text{ensayo de la estantería A} \rightarrow P(E_A) = \frac{10}{20+10+10} = \frac{1}{4} = 0,25$

$M_A = \text{libro de matemáticas de la estantería A} \rightarrow P(M_A) = P(E_A) = 0,25$

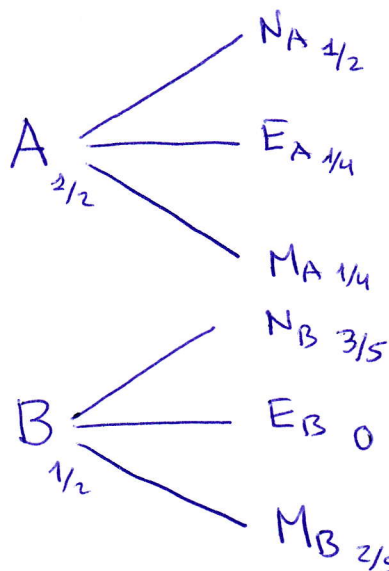
$N_B = \text{novela de la estantería B} \rightarrow P(N_B) = \frac{12}{12+8} = \frac{3}{5} = 0,6$

$E_B = \text{ensayo de la estantería B} \rightarrow P(E_B) = 0/20 = 0$

$M_B = \text{libro de matemáticas de la estantería B} \rightarrow P(M_B) = \frac{8}{12+8} = \frac{2}{5} = 0,4$

$M = \text{libro de matemáticas}$

31)



Por el teorema de la probabilidad total: Cipri

$$\boxed{P(M) = P(A) P(M_A/A) + P(B) P(M_B/B) = \frac{1}{2} \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{2}{5} = \frac{13}{40} = 0,325}$$

a2) Por el teorema de Bayes:

$$\boxed{P(B/M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{P(B) P(M_B/B)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{2} \frac{2}{5}}{\frac{13}{40}} = \frac{8}{13} \approx 0,6154}$$

b) X = tiempo de espera en una parada de autobús

$$X \rightsquigarrow N(15, 5)$$

$$b1) \boxed{P(X \leq 13) = P\left(Z \leq \frac{13-15}{5}\right) = P(Z \leq -0,40) = 1 - P(Z \leq 0,40) = 1 - 0,6554 = 0,3446}$$

↑
se mira en la tabla

b2) Nos dan $P(X > x_0) = 33\% = 0,3333$, luego teniendo en cuenta el suceso contrario $P(X > x_0) = 1 - P(X \leq x_0)$, de donde $P(X \leq x_0) = 0,6667$. La probabilidad 0,6667 no viene en la tabla y la más próxima es 0,6664 que corresponde a $z_0 = 0,43$.

Vamos a tipificar la variable, para ver cuántos usuarios superan el 33%.

$$z_0 = \frac{X - \mu}{\sigma} = 0,43 = \frac{X - 15}{5} \Rightarrow X = 0,43 \cdot 5 + 15 = 17,15 \text{ minutos}$$

Esto es, el 33% de los usuarios esperan 2,15 minutos más que la media (15 minutos).