UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2017
Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

PROPUESTA A

1A. a) Calcula razonadamente el área de la región determinada por la curva $f(x) = (x-1)(x+2)$, las rectas $x = -3$, $x = 2$ y el eje de abscisas. Esboza dicha región. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$. **(1 punto)**

2A. a) Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que la siguiente función sea continua en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ \\ 6x + k & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Enuncia el teorema de Bolzano y comprueba si la ecuación $\cos x = 2 - x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0, 2\pi]$. **(1 punto)**

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & az & = & 0 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 0$. **(1 punto)**

4A. Dados los planos $\alpha \equiv -x + 2y + z + 2 = 0$ y $\beta \equiv -2y + z = 0$
a) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas y los puntos de intersección del plano α con los tres ejes coordenados. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación general o implícita de la recta paralela a los planos α y β que pase por el punto $P(0, -1, 3)$. **(1 punto)**

5A. a) En una empresa hay tres robots A, B y C dedicados a soldar componentes electrónicos en placas de circuito impreso. El 25 % de los componentes son soldados por el robot A, el 20 % por el B y el 55 % por el C. Se sabe que la probabilidad de que una placa tenga un defecto de soldadura es de 0,03 si ha sido soldado por el robot A, 0,04 por el robot B y 0,02 por el robot C.

a1) Elegida una placa al azar, calcula razonadamente la probabilidad de que tenga un defecto de soldadura. **(0,75 puntos)**

a2) Se escoge al azar una placa y resulta tener un defecto de soldadura, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido soldada por el robot C. **(0,5 puntos)**

b) Lanzamos cinco veces una moneda trucada. La probabilidad de obtener cara es 0,6. Calcula razonadamente la probabilidad de:

b1) Obtener exactamente tres caras. **(0,75 puntos)**

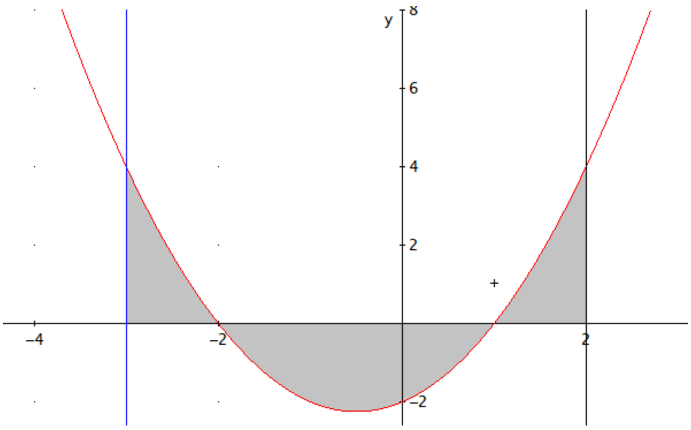
b2) Obtener más de tres caras. **(0,5 puntos)**

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Septiembre 2017

Propuesta A

1A a) $f(x) = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$



Puntos de corte con el eje OX

$$f(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0) \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow (-2,0) \end{cases}$$

Vértice

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-1}{2\cdot 1} = -0{,}5 \\ y_v = f(x_v) = (-0{,}5)^2 + (-0{,}5) - 2 = -2{,}25 \end{array}\right\} V(-0{,}5, -2{,}25)$$

Área

$$A = \int_{-3}^{-2} f(x)\,dx - \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-3}^{-2} - \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-2}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{1}^{2} =$$

$$= \frac{11}{6} + \frac{27}{6} + \frac{11}{6} = \boxed{\frac{49}{6}\,u^2}$$

b) La ec. de la recta tangente a $f(x)$ en $x=2$ es:

$$\left.\begin{array}{l} y - f(2) = f'(2)(x-2) \\ f(2) = (2-1)(2+2) = 4 \\ f'(x) = 2x+1 \longrightarrow f'(2) = 2\cdot 2 + 1 = 5 \end{array}\right\} \boxed{y - 4 = 5(x-2)}$$

2A

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{1/x} & x<0 \\ 6x+k & x \geq 0 \end{cases}$$

a) Continuidad en $x=0$: ¿$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$?

$$\lim_{x\to 0} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{1/x} = [1^\infty] = e^{\boxed{-1}} = e^{-1} \quad (*) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (6x+k) = k \end{cases} \Rightarrow k = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

para que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, en decir, para que f sea continua en $x=0$

$$\boxed{} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{x+1}{2x+1} - 1\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{x+1-2x-1}{2x+1}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{-x}{2x+1}\right) = -1$$

Vamos a calcular (*) por L'Hôpital:

$$L = \lim_{x\to 0-} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{1/x} \Rightarrow \log L = \log \lim_{x\to 0-} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{1/x} =$$

$$= \lim_{x\to 0-} \log \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} \log\left(\frac{x+1}{2x+1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0-} \frac{\log(x+1) - \log(2x+1)}{x} = [\text{L'Hôpital}] = \lim_{x\to 0-} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{2}{2x+1}}{1} = -1$$

$$\Rightarrow L = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

b) Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y en los extremos del intervalo toma valores de signo contrario, entonces $\exists c \in]a,b[: f(c) = 0$

Si la ec. es $\cos x = 2 - x$, la función a considerar es

$$g(x) = \cos x - 2 + x$$

que es continua en $\mathbb{R}$ (y en particular en $[0, 2\pi]$), por ser suma de funciones continuas. Además,

$$g(0) = 1 - 2 + 0 < 0$$

$$g(2\pi) = 1 - 2 + 2\pi > 0$$

luego por el teorema de Bolzano, $\exists c \in (0, 2\pi)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, la ecuación dada tiene, al menos, una solución en dicho intervalo.

$\boxed{3A}$ a) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $(A|b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$

$$|A| = a^3 - 3a + 2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aplicando Ruffini}}}{=} (a-1)^2(a+2) = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Caso $\boxed{a=1}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg } A = 1$$

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg } (A|b) = 2$$

Caso $\boxed{a=-2}$

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 2$$

$$(A|b)=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2+F_3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & \end{pmatrix} \Rightarrow rg\,(A|b)=3$$

Discusión

Si $a \neq \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow rg\, A = 3 = rg\,(A|b) = n^{o}$ de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D.

Si $a=1 \Rightarrow rg\, A = 1 < 2 = rg\,(A|b) \Rightarrow$ (t^a de Rouché-Fröbenius) S.I.

Si $a=-2 \Rightarrow rg\, A = 2 < 3 = rg\,(A|b) \Rightarrow$ (t^a de Rouché-Fröbenius) S.I.

b) Si $a=0$, el sistema queda:

$$\left.\begin{matrix} y+z=1 \\ x \quad +z=0 \\ x+y \quad =0 \end{matrix}\right\} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_3+F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

$[1] \longrightarrow z=\frac{1}{2}$

Sustituimos en [2]: $y=z=\frac{1}{2}$

Sustituimos en [3]: $x=-y=-\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{Solución: } (x,y,z)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$

4A a) Hallamos los puntos de intersección del plano α con los ejes:

$\alpha \cap OX \Rightarrow -x+2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow A(2,0,0) \Rightarrow \vec{OA}=(2,0,0)$

$\alpha \cap OY \Rightarrow 2y+2=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow B(0,-1,0) \Rightarrow \vec{OB}=(0,-1,0)$

$\alpha \cap OZ \Rightarrow z+2=0 \Rightarrow z=-2 \Rightarrow C(0,0,-2) \Rightarrow \vec{OC}=(0,0,-2)$

El volumen del tetraedro es:

$$V_{tetraedro}=\frac{1}{6}\left|\det(\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC})\right|=\frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\right|=\frac{1}{6}\cdot 4=\boxed{\frac{2}{3}\ u^3}$$

b) $r\equiv\begin{cases} -x+2y+z+2=0 \\ -2y+z=0 \end{cases}$ Ecs. implícitas de la recta intersección

$z=\lambda \Rightarrow -2y+\lambda=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}\lambda \Rightarrow$ (sustituyendo en la ec. de α)

$-x+2\frac{1}{2}\lambda+\lambda+2=0 \Rightarrow x=2+2\lambda$

Luego las ecuaciones paramétricas de la recta intersección

$$\begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{z}{1} \Rightarrow \frac{x-2}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2} \equiv r$$

La recta pedida es paralela a r y pasa por $P(0,-1,3)$, luego su ecuación continua es

$$\frac{x}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{2}$$

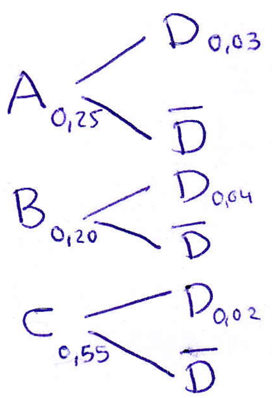
y sus ecuaciones generales o implícitas $\boxed{\begin{cases} x-4y-4=0 \\ 2y-z+5=0 \end{cases}}$

5A Sucesos: A = la placa elegida ha sido fabricada por el robot A

B = " " " " " " " " " B

C = " " " " " " " " " C

D = la placa elegida tiene un defecto de soldadura



a1) $P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) =$

$= 0{,}25 \cdot 0{,}03 + 0{,}20 \cdot 0{,}04 + 0{,}55 \cdot 0{,}02 = \boxed{0{,}0265}$

a2) $P(C/D) = \dfrac{P(C\cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}55 \cdot 0{,}02}{0{,}0265} = \boxed{0{,}415}$

b) X = obtener cara , $X \sim B(5, \frac{6}{10})$

b1) $P(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{6}{10}\right)^3\left(1-\frac{6}{10}\right)^2 = \frac{5!}{3!(5-3)!}\left(\frac{6}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^2 = \boxed{0{,}3456}$

b2) $P(X>3) = P(X=4) + P(X=5) = 0{,}2592 + 0{,}0778 = \boxed{0{,}3370}$

Recuerda que $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ con $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$X \sim B(n,p)$

Evaluación para Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2017

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos.
Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas.
Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.
Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

PROPUESTA B

1B. Halla razonadamente las dimensiones más económicas de una piscina de 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y el suelo necesiten la cantidad mínima de material. **(2,5 puntos)**

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+x-10}{x^2+x-2}\,dx$ b) $\displaystyle\int x^2 \ln x\,dx$ **(1,25 puntos por integral)**

Nota: ln denota logaritmo neperiano.

3B. Dadas matrices

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente A^{-1}. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A\cdot X+B=C^2$. **(1,5 puntos)**

4B. a) Halla razonadamente el valor de $a\in\mathbb{R}$ para el cual el plano $\alpha\equiv x-y-az+5=0$ es paralelo a la recta

$$r\equiv\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-5}=\frac{z}{2}$$ **(1,25 puntos)**

b) Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1,2,3)$ a la recta $r\equiv\dfrac{x-3}{2}=y-1=z$
(1,25 puntos)

5B. a) De una urna que contiene tres bolas blancas y dos bolas rojas extraemos, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas. Calcula razonadamente la probabilidad de:
a1) Que la segunda bola extraída sea blanca. **(0,75 puntos)**
a2) Si la segunda bola extraída ha sido blanca, que la primera fuera roja. **(0,5 puntos)**

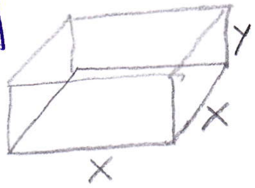
b) El tiempo de duración de las llamadas telefónicas a cierta centralita se distribuye según una distribución normal de media 5 minutos y varianza 4. Calcula razonadamente:
b1) La probabilidad de que una llamada dure menos de 4,5 minutos. **(0,75 puntos)**
b2) El tiempo de duración que no es superado por el 33 % de las llamadas. **(0,5 puntos)**

a	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

Septiembre 2017

Propuesta B

1B



$V = x^2 y = 32\ m^3 \Rightarrow y = \dfrac{32}{x^2}$

La superficie de sus paredes y el suelo es

$S = x^2 + 4xy = x^2 + 4x\dfrac{32}{x^2} = x^2 + \dfrac{128}{x}$

La función a minimizar es $S(x) = x^2 + \dfrac{128}{x}$

$S'(x) = 2x - \dfrac{128}{x^2}$

$S'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \dfrac{128}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 128 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{128}{2}} = 4$

$S''(x) = 2 + \dfrac{256}{x^4}$

$S''(4) > 0 \Rightarrow x = 4$ es un mínimo relativo de $S(x)$

Por tanto, las dimensiones de la piscina son: $\boxed{\begin{array}{l}\text{base } 4\times 4\ m \\ \text{altura } y = \frac{32}{16} = 2\ m\end{array}}$

2B

a) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+x-10}{x^2+x-2}\,dx = \int (x+1)\,dx + \int \frac{2x-8}{x^2+x-2}\,dx$

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^3+2x^2+x-10 & x^2+x-2 \\ \cline{3-3}
 & -x^3-x^2+2x & x+1 \\ \cline{2-2}
 & x^2+3x-10 & \\
 & -x^2-x+2 & \\ \cline{2-2}
 & 2x-8 &
\end{array}$$

$\dfrac{x^3+2x^2+x-10}{x^2+x-2} = x+1 + \dfrac{2x-8}{x^2+x-2}$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Prueba de la división:} \\ D = d\cdot C + R \\ \dfrac{D}{d} = C + \dfrac{R}{d}\end{array}}$

Calculamos $\displaystyle\int \frac{2x-8}{x^2+x-2}\,dx$

$\dfrac{2x-8}{x^2+x-2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2} = \dfrac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$

ya que $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$

y por tanto,

$2x-8 = A(x+2) + B(x-1)$

Si $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow -6 = 3A \Rightarrow A = -2 \\ x = -2 \Rightarrow -12 = -3B \Rightarrow B = 4 \end{cases}$

$\displaystyle\int \frac{2x-8}{x^2+x-2}\,dx = \int \frac{-2}{x-1}\,dx + \int \frac{4}{x+2}\,dx =$

$= -2\log|x-1| + 4\log|x+2|$

Así, $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+x-10}{x^2+x-2}\,dx = \boxed{\frac{x^2}{2} + x - 2\log|x-1| + 4\log|x+2| + C}$

donde log es el logaritmo natural

b) $\int x^2 \log x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \log x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right] = \frac{x^3}{3} \log x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx =$

$= \frac{x^3}{3} \log x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \log x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} = \boxed{\frac{x^3 \log x}{3} - \frac{x^3}{9} + C}$

donde log es el logaritmo natural.

3B a) $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Calculamos A^{-1} por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) $AX + B = C^2$
$AX = C^2 - B \longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(C^2 - B) \longrightarrow \boxed{X = A^{-1}(C^2 - B)}$

Calculamos C^2

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos $C^2 - B$

$$C^2 - B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 10 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos X

$$X = A^{-1}(C^2 - B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 10 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 5 & 6 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

4B a) $\alpha \equiv x - y + az + 5 = 0$

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-5} \Rightarrow 5x + 3y = 10 \\ \frac{x-2}{3} = \frac{z}{2} \Rightarrow 2x - 3z = 4 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} x - y + az = -5 \\ 5x + 3y = 10 \\ 2x - 3z = 4 \end{array} \right\}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & a\\ 5 & 3 & 0\\ 2 & 0 & -3\end{pmatrix},\quad (A|b)=\begin{pmatrix}1 & -1 & a & -5\\ 5 & 3 & 0 & 10\\ 2 & 0 & -3 & 4\end{pmatrix}$$

$$|A| = -9-6a-15 = -6a-24=0 \Rightarrow a=-4$$

Si $\boxed{a=-4}$

$rg\,A = 2$ ya que $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 5 & 3\end{vmatrix}\neq 0$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -4 & -5\\ 5 & 3 & 0 & 10\\ 2 & 0 & -3 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow[-2F_1+F_3]{-5F_1+F_2}\begin{pmatrix}1 & -1 & -4 & -5\\ 0 & 8 & 20 & 35\\ 0 & 2 & 5 & 14\end{pmatrix}\xrightarrow{-4F_3+F_2}\begin{pmatrix}1 & -1 & -4 & -5\\ 0 & 8 & 20 & 35\\ 0 & 0 & 0 & -21\end{pmatrix}$$

$rg(A|b)=3$

Como $rg\,A = 2\neq 3 = rg(A|b) \Rightarrow$ $\boxed{\text{la recta y el plano son paralelos}}$ si $a=-4$

$\boxed{\text{la recta y el plano son secantes}}$ si $a\neq -4$

b) $P(1,2,3)$

$r \equiv \dfrac{x-3}{2} = y-1 = z$

$$d(P,r)=\frac{|\vec{u_r}\times\vec{AP}|}{|\vec{u_r}|}$$ donde $A\in r$

$A(3,1,0)$, $\vec{u_r}=(2,1,1)$

$\vec{AP}=(1,2,3)-(3,1,0)=(-2,1,3)$

$$\vec{u_r}\times\vec{AP}=\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}=3\vec{i}+2\vec{k}-2\vec{j}+2\vec{k}-\vec{i}-6\vec{j}=$$
$$=2\vec{i}+4\vec{k}-8\vec{j}=(2,-8,4)$$

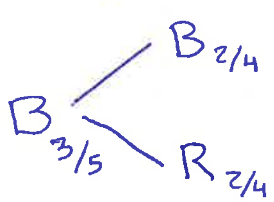
$|\vec{u_r}\times\vec{AP}|=\sqrt{2^2+(-8)^2+4^2}=\sqrt{84}$

$|\vec{u_r}|=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$

$$\boxed{d(P,r)=\frac{\sqrt{84}}{\sqrt{6}}=\sqrt{14}\ u}$$

5B a) B = la bola extraída es blanca , B_1 = bola blanca en la 1ª extracción

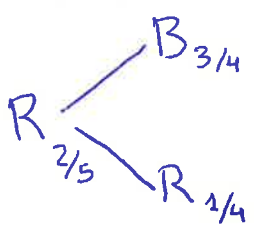
R = " " " " roja $\quad B_2$ = " " " la 2ª "



a1) $\boxed{P(B_2)}=P((B_1\cap B_2)\cup(R_1\cap B_2))=$

$=P(B_1)P(B_2/B_1)+P(R_1)P(B_2/R_1)=$

$=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4}+\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{6}{10}=\boxed{\dfrac{3}{5}}$



R_1 = bola roja en la 1ª extracción

a2) $$\boxed{P(R_1/B_2)}=\frac{P(R_1\cap B_2)}{P(B_2)}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{3}{5}}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

b) X = duración (en minutos) de una llamada telefónica

$$\left.\begin{array}{l}\mu = 5 \\ \sigma^2 = 4 \Rightarrow \sigma = \sqrt{4} = 2\end{array}\right\} X \rightsquigarrow N(5,2)$$

b1) $\boxed{P(X<4,5)} = P\left(Z < \frac{4,5-5}{2}\right) = P(Z<-0,25) = P(Z>0,25) =$

$= 1 - P(Z<0,25) = 1 - 0,5987 = \boxed{0,4013}$

b2) Hay que buscar un z_0 tal que $P(Z<z_0) = \frac{33}{100}$, pero no viene en las tablas

Buscamos en la tabla un z_1 tal que $P(Z<z_1) = \frac{67}{100} = 0,67$ y mirando en la tabla, $z_1 = 0,44$

z_0 será el simétrico de z_1 respecto del origen, luego $z_0 = -0,44$ y, por tanto

$$z_0 = \frac{a-5}{2} = -0,44 \Rightarrow a = -0,44 \cdot 2 + 5 = 4,12$$

El tiempo de las llamadas es de $\boxed{4,12 \text{ min.}}$

$\boxed{4B}$ a) De otra forma

$\vec{u}_r \not\perp \vec{n}_\alpha \Rightarrow r$ y α se cortan en un punto

$\vec{u}_r \perp \vec{n}_\alpha \Rightarrow \begin{cases} P_r \in \alpha \Rightarrow r \subset \alpha \\ P_r \notin \alpha \Rightarrow r \parallel \alpha \end{cases}$

$\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\alpha = (3,-5,2)\cdot(1,-1,a) = 3+5+2a = 0 \Rightarrow \boxed{a=-4}$

Si $a=-4$, como $P_r(2,0,0) \notin \alpha$ (ya que $2-0+0+5 \neq 0$), se tiene que $r \parallel \alpha$

Si $a \neq -4$, entonces r y α se cortan en un punto.