Junio 2016

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax - 6$, $a \in \mathbb{R}$, se pide:
a) Determinar el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en su punto de inflexión sea -3. **(1,25 puntos)**
b) Para el valor del parámetro encontrado, calcular los extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. **(1,25 puntos)**

2A. Calcula la integral definida

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{2}\,dx \qquad \textbf{(2,5 puntos)}$$

Nota: Puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$ y a continuación aplicar integración por partes.

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & mz & = & 0 \\ 4x & - & 3y & + & 2z & = & m \\ -mx & + & y & - & z & = & 1-m \end{array}\right. \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado. **(1 punto)**

4A. Sea r la recta determinada por el punto $P(1,0,1)$ y el vector $\vec{v} = (1,-1,0)$.
a) Calcula el punto de r más cercano al punto $Q(0,0,1)$. **(1,5 puntos)**
b) Calcula el punto simétrico de Q respecto a r. **(1 punto)**

(sigue a la vuelta)

$\boxed{\text{Junio 2016}}$

Propuesta A

1A $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax - 6 \quad , a \in \mathbb{R}$

a) $f'(x) = 3x^2 + 6x + a$

$f''(x) = 6x + 6$

$\left.\begin{array}{l} f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ f'''(x) = 6 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = -1$ es un pto de inflexión de f

La pendiente de la recta tangente en el punto de inflexión es $f'(-1)$, luego $f'(-1) = -3 \Rightarrow 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + a = -3 \Rightarrow \boxed{a = 0}$

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$

$f''(x) = 6x + 6$

$f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow x = 0$ es un mínimo relativo de $f \rightarrow (0, f(0)) = (0, -6)$

$f''(-2) = -6 < 0 \Rightarrow x = 0$ es un máximo relativo de $f \rightarrow (-2, f(-2)) = (-2, -2)$

Estudiamos la monotonía (signo de f')

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$

$+ \qquad - \qquad +$

$-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1$

$\boxed{f \text{ es } \begin{cases} \text{creciente en } (-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \\ \text{decreciente en } (-2, 0) \end{cases}}$

Se puede poner directamente, teniendo en cuenta que f es continua en $\mathbb{R}$, tiene un mín. rel. en $x = 0$ y un máx. rel. en $x = -2$

2A $\displaystyle\int_0^{\pi^2/4} \frac{\cos\sqrt{x}}{2}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}\,dt = 2t\,dt \end{array} \middle| \begin{array}{l} x = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{array} \right] =$

$\displaystyle = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{2}\, 2t\,dt = \int_0^{\pi/2} t\cos t\,dt = \left[\begin{array}{l} u = t \rightarrow du = dt \\ dv = \cos t\,dt \rightarrow v = \operatorname{sen} t \end{array} \right] =$

$\displaystyle = t \operatorname{sen} t \Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t\,dt = \left[\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - 0 \cdot \operatorname{sen} 0 \right] - \Big[-\cos t \Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$

3A $\begin{cases} x - y + mz = 0 \\ 4x - 3y + 2z = m \\ -mx + y - z = 1 - m \end{cases}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 4 & -3 & 2 \\ -m & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 4 & -3 & 2 \\ -m & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 4m + 2m - (3m^2 + 2 + 4) =$

$= -3m^2 + 6m - 3 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-3)\cdot(-3)}}{2\cdot(-3)} = \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$

Discusión:

Si $m = 1 \Rightarrow |A| = 0$

$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - (-1) = 0 \,;\, \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - (1) = 0$

$\Rightarrow$ rango$(A|b) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Discusión:} \\ \text{Si } m \neq 1 \Rightarrow \text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = \text{nº de incógnitas} \Rightarrow \text{S.C.D.} \\ \text{Si } m = 1 \Rightarrow \text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 2 < 3 = \text{nº de incógnitas} \Rightarrow \text{S.C.I} \end{array}}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 + F_3]{-4F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} [1] \\ [2] \\ \end{array}$

Si $z = \lambda \in \mathbb{R}$, entonces: sustituyendo en $[2]$: $y = 1 + 2\lambda$

" en $[1]$: $x = 1 + \lambda$

$\boxed{\text{Soluciones: } (x, y, z) = (1+\lambda,\ 1+2\lambda,\ \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}}$

4A $\overrightarrow{QX}$, donde $X \in r$ es un punto genérico de r, es perpendicular al vector $\vec{v} = \vec{u}_r$ (vector director de r), y por tanto, su producto escalar es cero.

Además, si llamamos R al punto que nos piden, se tiene que R es el punto medio del segmento $\overline{QQ'}$, donde Q' es el simétrico de Q respecto de R.

a) $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow$ $\qquad \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{QX} = (1+\lambda, -\lambda, 1) - (0,0,1) = (1+\lambda, -\lambda, 0) \\ \vec{v} = (1, -1, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{QX} \perp \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{QX} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (1+\lambda, -\lambda, 0) \cdot (1, -1, 0) = 0 \Rightarrow 1+\lambda+\lambda = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$

Como consecuencia $\boxed{R\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right), -\left(-\frac{1}{2}\right), 1\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)}$

b) $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} = \frac{0 + x_{Q'}}{2} \Rightarrow x_{Q'} = 1 \\ \frac{1}{2} = \frac{0 + y_{Q'}}{2} \Rightarrow y_{Q'} = 1 \\ 1 = \frac{1 + z_{Q'}}{2} \Rightarrow 1 + z_{Q'} = 2 \Rightarrow z_{Q'} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{Q'(1, 1, 1)}$

PROPUESTA B

1B. a) Enuncia los Teoremas de Bolzano y de Rolle. **(1 punto)**
b) Razona que la ecuación $2e^x + x^5 = 0$ tiene al menos una solución real. **(0,75 puntos)**
c) Razona que, de hecho, dicha solución es única. **(0,75 puntos)**

2B. a) Calcula el área de la región acotada por las gráficas de las parábolas $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 11$. **(1,5 puntos)**
b) Calcula $c \in \mathbb{R}$ para que las rectas tangentes a las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el punto de abscisa $x = c$ tengan la misma pendiente. **(1 punto)**

3B. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = 10$$

donde $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}$, calcula los determinantes

$$\begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 3x & y & z \\ 0 & 3a & 2b & 3c \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta. **(1,25 puntos por determinante)**

4B. Dados los planos

$$\pi_1 \equiv ax + y + 2z = 2, \quad \pi_2 \equiv x + y + z = 0 \quad \text{y} \quad \pi_3 \equiv x + ay + z = a,$$

donde $a \in \mathbb{R}$, se pide:
a) Estudiar la posición relativa de los planos anteriores en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. **(1,5 puntos)**
b) Para el valor $a = 1$, calcular la distancia entre π_2 y π_3. **(1 punto)**

Junio 2016

Propuesta B

1B) a) Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[\text{signo} f(a) \neq \text{signo} f(b)]$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c)=0$

Teorema de Rolle

Si f es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a)=f(b)$, entonces $\exists c \in (a,b)$ t.q. $f'(c)=0$.

b) $f(x)=2e^x+x^5$

f es continua en $\mathbb{R}$, y por lo tanto, continua en $[-1,0]$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 2e^{-1}+(-1)^5 = \frac{2}{e}-1 < 0 \\ f(0)=2e^0+0^5 = 2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{signo } f(-1) \neq \text{signo } f(0)$$

Aplicando, el teorema de Bolzano $\exists c \in (-1,0)$ tal que $f(c)=0$, esto es, c es una solución de la ecuación $2e^x+x^5=0$.

c) Como $f'(x) = 2e^x + 5x^4 \neq 0$ en $(-1,0)$, entonces $f(x)=2e^x+x^5$ tiene una única solución en $[-1,0]$.

Teorema (que se obtiene combinando los teoremas de Bolzano y de Rolle)

Si $f'(x) \neq 0$ en (a,b), la ecuación $f(x)=0$ tiene, como mucho, una única solución en $[a,b]$.

2B a) Representamos las funciones

$$\boxed{f(x) = x^2 - 4x + 3}$$

Puntos de corte con OX

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow (3,0) \text{ y } (1,0)$$

Vértice

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow V_f(2, f(2)) = (2, -1)$$

$$\boxed{g(x) = -x^2 + 2x + 11}$$

Puntos de corte con OX

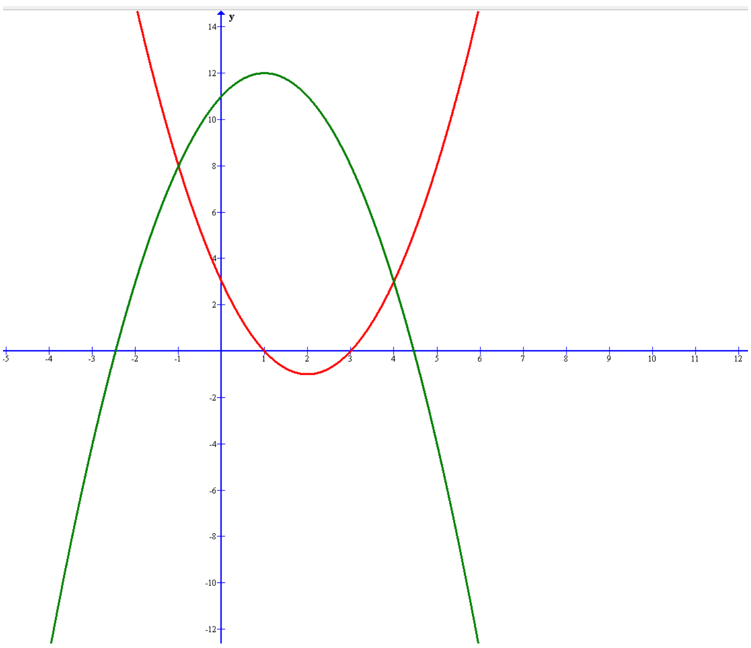
$$y = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 11 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{12} \Rightarrow (1+\sqrt{12}, 0) \text{ y } (1-\sqrt{12}, 0)$$

Vértice

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2\cdot(-1)} = 1 \Rightarrow V_g(1, g(1)) = (1, 12)$$

Puntos de corte entre las funciones

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 2x + 11 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$



Área

$$A = \int_{-1}^{4} [g(x) - f(x)]\,dx = \int_{-1}^{4} [-x^2 + 2x + 11 - (x^2 - 4x + 3)]\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{4} (-2x^2 + 6x + 8)\,dx = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 + 8x \Big]_{-1}^{4} =$$

$$= \left(-\frac{2}{3}4^3 + \frac{6}{2}4^2 + 8\cdot 4\right) - \left(-\frac{2}{3}(-1)^3 + \frac{6}{2}(-1)^2 + 8(-1)\right) = \frac{112}{3} - \left(-\frac{13}{3}\right) = \boxed{\frac{125}{3}u^2}$$

b) $\left.\begin{array}{l} f'(x) = 2x-4 \\ g'(x) = -2x+2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2c-4 = -2c+2 \Rightarrow 4c = 6 \Rightarrow \boxed{c = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}}$

3B $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = 10$

a) $$\begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} \underset{[1]}{=} \begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x & y & z \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ 4 & 4 & 6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} =$$

$$\underset{[2]}{=} 7 \cdot \frac{1}{5} \left[\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} \right] \underset{[3]}{=} \frac{7}{5}\left[10 + 2 \cdot 0\right] = \frac{70}{5} = \boxed{14}$$

[1] Un determinante, con una fila o columna formada por la suma de dos números puede descomponerse en suma de otros dos determinantes que tienen las mismas filas o columnas restantes y, en lugar de aquella, otra formada por los primeros y segundos sumandos, respectivamente.

[2] Si multiplicamos una fila o columna por un número real, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

[3] El determinante de una matriz con dos filas o columnas iguales es cero.

b) $$\begin{vmatrix} 0 & 3x & y & z \\ 0 & 3a & 2b & 3c \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{[4]}{=} (-5) \begin{vmatrix} 3x & y & z \\ 3a & 2b & 3c \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{[2]}{=} (-5) \cdot 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & 2b & 3c \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{[5]}{=} (-15) \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ a & 2b & 3c \\ x & y & z \end{vmatrix} \underset{[5]}{=} 15 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = -15 \cdot 10 = \boxed{-150}$$

[4] Desarrollamos el determinante por la 1ª columna.

[2]

[5] Si se intercambian dos filas o columnas, cambia el signo del determinante.

4B $\begin{cases} ax+y+2z=2 \\ x+y+z=0 \\ x+ay+z=a \end{cases}$ $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$, $(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & a \end{array}\right)$

$|A| = a+2a+1-2-a^2-1 = -a^2+3a-2=0 \Rightarrow a=\begin{cases}1\\2\end{cases}$

Si $\boxed{a=1}$:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ rango $A = 2 < 3 =$ rango $(A|b)$
$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

Si $\boxed{a=2}$:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow$ rango $A = 2 < 3 =$ rango $(A|b)$

Submatrices de orden 2×3 para $a=1$:

$rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow$ Hay una submatriz de orden 2×3 con rango 1

Submatrices de orden 2×3 para $a=2$:

$\left(\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{c|cc} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ Quitando 3ª fila

$\left(\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{c|cc} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$ Quitando 2ª fila

$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$ Quitando 1ª fila

Todas las submatrices de orden 2×3 tienen rango 2.

Discusión: $a \neq 1,2 \Rightarrow$ los tres planos se cortan en un punto
$a=1 \Rightarrow$ dos planos son paralelos y el tercero los corta según dos rectas paralelas
$a=2 \Rightarrow$ los planos se cortan dos a dos según tres rectas

b) $a=1 \Rightarrow \begin{cases} \pi_2 \equiv x+y+z=0 \\ \pi_3 \equiv x+y+z=1 \end{cases}$

$$\boxed{d(\pi_2, \pi_3)} = d(P_{\pi_2}, \pi_3) = \frac{|1+1+(-2)-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{6} u}$$

$P_{\pi_2}(1,1,-2)$ es un pto de π_2