Septiembre 2016

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Se quiere construir un depósito de chapa abierto superiormente con forma de prisma recto de base cuadrada, de $1000m^3$ de capacidad, lo más económico posible. Sabiendo que:

- El coste de la chapa usada para los laterales es de 100 euros el metro cuadrado
- El coste de la chapa usada para la base es de 200 euros el metro cuadrado

¿Qué dimensiones debe tener el depósito?
¿Cuál es el precio de dicho depósito? **(2,5 puntos)**

2A. Dada la función

$$g(x) = (x+b)\cos x, \qquad b \in \mathbb{R}.$$

a) Calcula la primitiva $G(x)$ de $g(x)$ que verifica que $G(0) = 1$. **(1,25 puntos)**
b) Calcula el valor de $b \in \mathbb{R}$ sabiendo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{G(x) - g'(x)}{x} = -2. \qquad \textbf{(1,25 puntos)}$$

3A. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) ¿Qué dimensión debe tener una matriz X para poder efectuar el producto matricial $A \cdot X \cdot B$? **(0,5 puntos)**
b) Despeja X en la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B + C = D$. **(1 punto)**
c) Calcula la matriz X. **(1 punto)**

4A. Dadas las rectas

$$r \equiv 2 - x = y - 2 = \frac{z}{3} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = c - 3\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

donde $c \in \mathbb{R}$, se pide:
a) Estudiar la posición relativa de r y s en función del parámetro $c \in \mathbb{R}$. **(1,5 puntos)**
b) Hallar el punto de intersección de r y s cuando dichas rectas sean secantes. **(1 punto)**

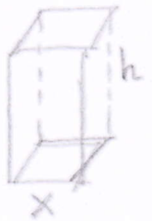
(sigue a la vuelta)

Septiembre 2016

Cipri

Propuesta A

1A



x = lado de la base del depósito

h = altura del depósito

$$1000 = x^2 h \Rightarrow h = \frac{1000}{x^2}$$

$$p \equiv \text{precio} = 200x^2 + 100 \cdot 4 \cdot x h$$

$$p = 200x^2 + 400x\,\frac{1000}{x^2}$$

$$p(x) = 200x^2 + \frac{400\,000}{x}$$

Hay que minimizar $p(x)$:

$$p'(x) = 400x - \frac{400\,000}{x} = \frac{400x^2 - 400\,000}{x}$$

$$p'(x) = 0 \Rightarrow 400x^2 - 400\,000 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{400\,000}{400}} = 10$$

$$p''(x) = 400 + \frac{400\,000}{x^2}$$

$$p''(10) = 400 + \frac{400\,000}{10^2} > 0 \Rightarrow x = 10 \text{ es un mín. (relativo)}$$

Solución: las dimensiones del depósito son $10 \times 10 \times 10$ m y el precio del mismo es $p(10) = 200 \cdot 10^2 + \frac{400000}{10} = 60\,000$ €

2A a) $g(x) = (x+b)\cos x$ con $b \in \mathbb{R}$

$$G(x) = \int (x+b)\cos x\,dx = \int x\cos x\,dx + b\int \cos x\,dx \underset{①}{=}$$

$$\int x\cos x\,dx = \begin{bmatrix} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos x\,dx \rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{bmatrix} = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx =$$

$$= x\operatorname{sen} x + \cos x$$

$$\underset{①}{=} x\operatorname{sen} x + \cos x + b\operatorname{sen} x + C$$

$$G(0) = 1 \Rightarrow 0\operatorname{sen} 0 + \cos 0 + b\operatorname{sen} 0 + C = 1 \Rightarrow C = 0$$

$$\boxed{G(x) = x\operatorname{sen} x + \cos x + b\operatorname{sen} x = (x+b)\operatorname{sen} x + \cos x}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{G(x)-g'(x)}{x} = -2$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+b)\,\text{sen}\,x + \cos x - [\cos x - (x+b)\,\text{sen}\,x]}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+b)\,\text{sen}\,x + \cancel{\cos x} - \cancel{\cos x} - (x+b)\,\text{sen}\,x}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(x+b)\,\text{sen}\,x}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2[\text{sen}\,x + (x+b)\cos x]}{1} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} 2[\text{sen}\,x + (x+b)\cos x] = 2b = -2 \Rightarrow \boxed{b=-1}$

3A a) $A_{2\times 2}\, X_{\boxed{2\times 3}}\, B_{3\times 3}$ tiene que tener dimensión 2×3

b) $AXB = D-C \Rightarrow A^{-1}AXB = A^{-1}(D-C) \Rightarrow XB = A^{-1}(D-C) \Rightarrow$

$\Rightarrow XBB^{-1} = A^{-1}(D-C)B^{-1} \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}(D-C)B^{-1}}$

c) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

4A a) Puestas las rectas en ecs. paramétricas, e igualando los valores de los puntos genéricos, tendremos un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas.

Si el sistema es compatible determinado, las rectas son secantes y se cortan en un punto.

Si el sistema es compatible indeterminado, las rectas son coincidentes

Si el sistema es incompatible, las rectas son paralelas o se cruzan.

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = y-2 = \frac{z}{3} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2-\mu \\ y = 2+\mu \\ z = 3\mu \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -1+2\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = c-3\lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-\mu = -1+2\lambda \\ 2+\mu = -1+\lambda \\ 3\mu = c-3\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda+\mu = 3 \\ \lambda-\mu = 3 \\ 3\lambda+3\mu = c \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } (A|b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & c \end{pmatrix}$$

$$|(A|b)| = -2c+9+\cancel{9}\cancel{+9}\cancel{-18}-c = 0 \Rightarrow c = 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Discusión: Si $c \neq 3 \Rightarrow$ rango $A = 2 < 3 =$ rango$(A|b) \Rightarrow$ las rectas son paralelas o se cruzan, pero como $\frac{-1}{2} \neq \frac{1}{1}$ (no son proporcionales) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ las rectas se cruzan.

Si $c = 3 \Rightarrow$ rango $A =$ rango $(A|b) =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ las rectas son secantes

b) Si $c = 3$, se tiene:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[-3F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [2]: $3\mu = -3 \Rightarrow \mu = -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow P \begin{cases} x = 2-(-1) \\ y = 2+(-1) \\ z = 3\cdot(-1) \end{cases} = \boxed{(3, 1, -3)} \text{ (punto de intersección)}$$

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. Dada la función

$$f(x) = 2xe^{1-x}$$

se pide:
a) Estudiar si tiene asíntotas horizontales **(1.25 puntos)**
b) Calcular sus puntos de inflexión. **(1,25 puntos)**

2B. Dadas las funciones $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = 3 - x$, se pide:
a) Esbozar la región encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$. **(0,5 puntos)**
b) Calcular el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3B. a) Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius. **(0,5 puntos)**
b) Razona que un sistema de tres ecuaciones lineales con cuatro incógnitas no puede ser compatible determinado. **(0,5 puntos)**
c) Determina para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & 3y & - & z & + & 2t & = & 2 \\ 5x & + & y & + & 2z & & & = & 1 \\ x & + & 8y & - & 5z & + & 6t & = & a \end{array}\right.$$

es incompatible. **(1,5 puntos)**

4B. Dados los planos

$$\pi \equiv 2x - 3y + z = 0 \qquad \text{y} \qquad \pi' \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = 2 + 2\lambda + \mu \end{array}\right. \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

y el punto $P(2, -3, 0)$, se pide:
a) Hallar la ecuación continua de la recta r que pasa por P y es paralela a la recta s determinada por la intersección de π y π'. **(1,5 puntos)**
b) Calcular el ángulo entre los planos π y π'. **(1 punto)**

Cipri

Septiembre 2016

Propuesta B

1B) a) $f(x) = 2xe^{1-x}$

$$y = \lim_{x\to+\infty} 2xe^{+1-x} = [\infty \cdot 0] = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{x-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^{x-1}} = 0$$

$\Rightarrow \boxed{y=0 \text{ es una A.H.}}$

$$y = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{e^{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{e^{-x-1}} = \lim_{x\to+\infty} -2xe^{x+1} = -\infty$$

$\Rightarrow \boxed{\nexists \text{ A.H. cuando } x\to-\infty}$

b) $f'(x) = 2e^{1-x} + 2xe^{1-x}(-1) = e^{1-x}(2-2x)$

$f''(x) = -e^{1-x}(2-2x) + e^{1-x}(-2) = e^{1-x}[(-2+2x)-2] =$

$= e^{1-x}[2x-4]$

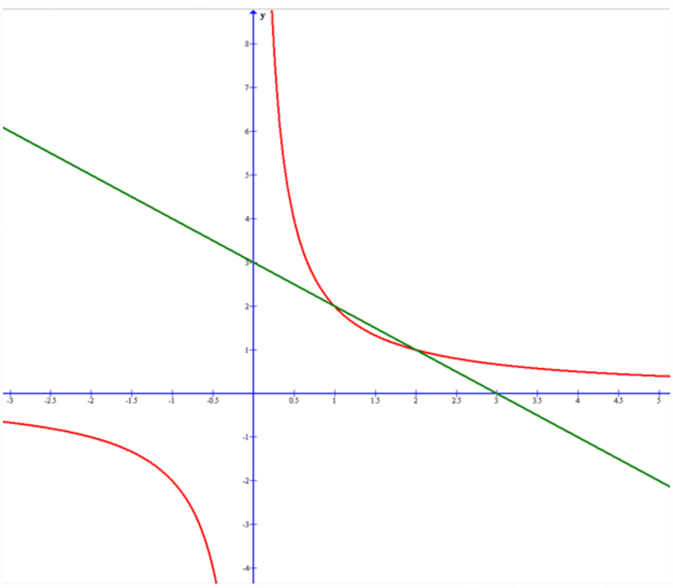
$f''(x) = 0 \Rightarrow e^{1-x}(2x-4) = 0 \Rightarrow 2x-4 = 0 \Rightarrow x = 2$

$f'''(x) = -e^{1-x}(2x-4) + e^{1-x}\cdot 2$

$f'''(2) = -e^{1-2}(2\cdot 2-4) + e^{1-2}\cdot 2 \neq 0 \Rightarrow x=2$ es un punto de inflexión

$\boxed{\text{Punto de inflexión } (2, f(2)) = \left(2, \frac{4}{e}\right)}$

2B)



$y = \frac{2}{x}$

x	y
1	2
10	0,2
-1	-2
-10	-0,2

$y = 3 - x$

x	y
0	3
3	0

A.H. $y = 0$

A.V. $x = 0$

Cipri

b) Puntos de corte de las funciones: $f(x) = g(x)$

$$\frac{2}{x} = 3 - x \Rightarrow 2 = 3x - x^2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

$$A = \int_1^2 \left[(3-x) - \frac{2}{x}\right] dx = 3x - \frac{x^2}{2} - 2\log x \Big]_1^2 =$$

$$= 3\cdot 2 - \frac{2^2}{2} - 2\log 2 - \left(3 - \frac{1}{2} - 2\log 1\right) = \boxed{\frac{3}{2} - 2\log 2 \ u^2}$$

donde log es el logaritmo natural o neperiano.

3B a) Teorema de Rouché-Fröbenius

Un sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ es compatible si, y solo si, rango A = rango $(A|B)$.

b) Para que un sistema de ecuaciones lineales 3×4, $AX = B$, sea compatible determinado se tendrían que cumplir:

rango A = rango $(A|B)$ = nº incógnitas

pero la última igualdad es falsa, porque el rango $(A|B) \leq 3$.

c) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & -5 & 6 & a \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -5 & 6 & a \end{vmatrix} = 24 - 10 + 6 - 4a = 0 \Rightarrow a = 5$$

Discusión:

Si $a \neq 5 \Rightarrow$ rango $A = 2 < 3 =$ rango $(A|B) \Rightarrow$ Sistema incompatible

Si $a = 5 \Rightarrow$ rango $A = 2 =$ rango $(A|B) <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C. Indeterminado

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & -5 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

(4B) a) $\pi \equiv 2x-3y+z=0$, $\pi' \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda+\mu \\ y = \lambda-\mu \\ z = 2+2\lambda+\mu \end{cases}$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$

$P(2,-3,0)$

$r \equiv \begin{cases} P \\ \vec{u}_r = \vec{u}_\pi \times \vec{u}_{\pi'} \end{cases}$ (vector director de la recta intersección de los planos)

$\vec{u}_\pi = (2,-3,1)$, $\vec{u}_{\pi'} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k}-\vec{k}+2\vec{\imath}-\vec{\jmath} =$

$= 3\vec{\imath}+\vec{\jmath}-2\vec{k} = (3,1,-2)$

$\vec{u}_r = \vec{u}_\pi \wedge \vec{u}_{\pi'} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6\vec{\imath}+2\vec{k}+3\vec{\jmath}+9\vec{k}-\vec{\imath}+4\vec{\jmath} =$

$= 5\vec{\imath}+7\vec{\jmath}+11\vec{k} = (5,7,11)$

$$\boxed{r \equiv \frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{7} = \frac{z}{11}}$$

b) $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{u}_\pi \cdot \vec{u}_{\pi'}|}{|\vec{u}_\pi|\,|\vec{u}_{\pi'}|} = \dfrac{|(2,-3,1)\cdot(3,1,-2)|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}\,\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \dfrac{1}{14}$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \arccos\frac{1}{14} = 85^\circ 54' 14{,}24''}$$