



Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Dada la función $f(x) = e^{\sin x} + x^2 + ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$:

- Determina los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ sabiendo que la gráfica de $f(x)$ pasa por el punto $(0,2)$ y que en dicho punto tiene un extremo relativo. **(1,5 puntos)**
- Para los valores de los parámetros encontrados, estudia si dicho extremo relativo es un máximo o un mínimo. **(1 punto)**

2A. Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ (2x - 2)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- Esboza la región encerrada entre la gráfica de $g(x)$ y el eje de abscisas. **(0,5 puntos)**
- Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3A. a) Despeja X en la ecuación matricial $X \cdot A + B = X$, donde A , B y X son matrices cuadradas de orden 3. **(1 punto)**

b) Calcula X , siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

4A. a) Calcula la distancia del punto $P(-1, 2, 0)$ a la recta

$$r \equiv \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases} \quad \textbf{(1,25 puntos)}$$

b) Calcula el punto simétrico de P respecto de r . **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

Junio de 2015

PROPUESTA A

1A) a) $f(x) = e^{\sin x} + x^2 + ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

$f(x)$ pasa por $(0, 2)$ y tiene un extremo relativo en dicho punto

$$2 = e^{\sin 0} + 0^2 + a \cdot 0 + b \rightarrow \boxed{b = 2 - e^0 = 2 - 1 = 1}$$

$$f'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x + 2x + a$$

$f'(0) = 0$ ya que en $x=0$ tiene un extremo relativo

$$0 = e^{\sin 0} \cdot \cos 0 + 2 \cdot 0 + a \rightarrow \boxed{a = -1}$$

b) $f(x) = e^{\sin x} + x^2 - x + 1$

$$f'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x + 2x - 1$$

$$f''(x) = -\sin x e^{\sin x} + e^{\sin x} \cdot \cos^2 x + 2$$

$$f''(0) = -\sin 0 \cdot e^{\sin 0} + e^{\sin 0} \cdot \cos^2 0 + 2 = 3 > 0 \Rightarrow x=0 \text{ es un } \underline{\text{mínimo}} \text{ relativo de } f(x).$$

2A) $g(x) = \begin{cases} 2x+4 & -2 \leq x < 0 \\ (2x-2)^2 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} 2x+4 & -2 \leq x < 0 \\ 4x^2-8x+4 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

a) $y = 2x+4$

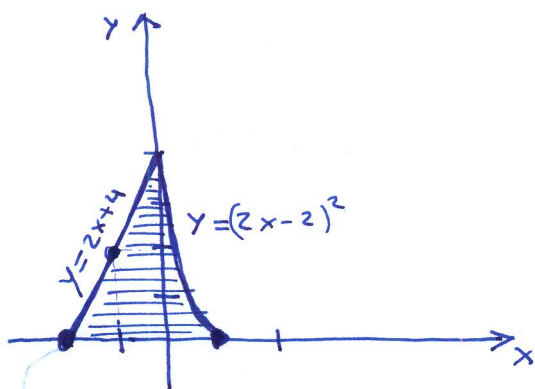
x \ y	
-2	0
-1	2
0	4

$y = 4x^2 - 8x + 4$

Vértice: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{2 \cdot 4} = 1$
 $y_v = 4 - 8 + 4 = 0$ } $V(1, 0)$

Tabla de valores:

x	0	1
y	4	0



$$\begin{aligned} \text{b) } \boxed{A} &= \int_{-2}^0 (2x+4) dx + \int_0^1 (4x^2-8x+4) dx = \\ &= \left[2 \frac{x^2}{2} + 4x \right]_{-2}^0 + \left[4 \frac{x^3}{3} - 8 \frac{x^2}{2} + 4x \right]_0^1 = \\ &= -(4-8) + \frac{4}{3} - 4 + 4 = 4 + \frac{4}{3} = \boxed{\frac{16}{3} \text{ u}^2} \end{aligned}$$

3A a) $XA + B = X$

$$XA - X = -B$$

$$X(A - I) = -B$$

$$X(A - I)(A - I)^{-1} = -B(A - I)^{-1} \Rightarrow \boxed{X = -B(A - I)^{-1}}$$

b) $-B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $(A - I)^{-1}$

$$(A - I | I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2 + F_1 \\ 2F_1 + F_3}]{F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{F_2 \cdot (-1) \\ F_3 \cdot (-1)}]{F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2 \cdot (-1) \\ F_3 \cdot (-1)}]{F_2 \cdot (-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -1 \end{array} \right) =$$

$$= (I | (A - I)^{-1}) \Rightarrow (A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de X

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ +3 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}}$$

4A a) $P(-1, 2, 0)$

$r \equiv \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$ ¿d(P, r)?

$d(P, r) = \frac{|\vec{u}_r \times \vec{AP}|}{|\vec{u}_r|}$ donde $\vec{u}_r$ es un vector director de r
 $A \in r$

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{k} - 2\vec{i} + \vec{j} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1, 1, -1)$$

Punto A: Tomamos $y = 0 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow A(-2, 0, 1)$

$$\vec{AP} = (-1, 2, 0) - (-2, 0, 1) = (1, 2, -1)$$

$$\vec{u}_r \times \vec{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{k} - \vec{j} - \vec{k} + 2\vec{i} - \vec{j} = (1, -2, -3)$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{AP}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{u}_r| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$\boxed{d(P, r) = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{14} \sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{42}}{3} u}$$

b). plano $\pi \perp r$ que pasa por P

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_\pi = \vec{u}_r = (-1, 1, -1) \\ P(-1, 2, 0) \end{array} \right\} \pi \equiv \vec{n}_\pi \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$$

$$(-1, 1, -1) \cdot (x+1, y-2, z) = 0$$

$$-(x+1) + y - 2 - z = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv -x + y - z - 3 = 0}$$

$$\cdot \{M\} = r \cap \pi$$

$$\left. \begin{array}{l} -x + y + 2z = 0 \\ y + z = 1 \rightarrow y = 1 - z \\ -x + y - z = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -x + 1 - z + 2z = 0 \\ -x + 1 - z - z = 3 \end{array} \left\} \begin{array}{l} -x + z = -1 \\ -x - 2z = 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{-(-1)}$$

$$\rightarrow x - z = 1$$

$$-x - 2z = 2$$

$$\underline{-3z = 3} \Rightarrow z = -1 \Rightarrow y = 1 - (-1) = 2$$

$$\text{Como } -x + y + 2z = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\boxed{M(0, 2, -1)}$$

• P' simétrico de P respecto de M

$$P'(x, y, z)$$

$$(0, 2, -1) = \left(\frac{x-1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{2} = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \frac{y+2}{2} = 2 \Rightarrow y = 2 \\ \frac{z}{2} = -1 \Rightarrow z = -2 \end{cases}$$

$$\text{El simétrico de } P \text{ respecto de } r \text{ es } \boxed{\underline{\underline{P'(1, 2, -2)}}}$$



PROPUESTA B

1B. Calcula el dominio y las asíntotas de las siguientes funciones

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x-x}}{x-2}, \quad g(x) = \frac{x^3}{x^2-4x+4} \quad (1,25 \text{ puntos por cada función})$$

2B. Dada la función $f(x) = (x+1)e^{2x}$, se pide:

- a) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de $f(x)$. **(1,25 puntos)**
- b) Encuentra una primitiva de la función $f(x)$ que pase por el origen de coordenadas. **(1,25 puntos)**

3B. He pensado un número de tres cifras tal que la cifra de las decenas es la media aritmética de las otras dos. Además, si a dicho número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198. Por último, las tres cifras de mi número suman 12.

- a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales que recoja la información anterior y clasifícalo. Para ello, puede serte útil observar que el número cuya cifra de las centenas es x , la de las decenas y , y la de las unidades z , puede expresarse como $100x + 10y + z$. **(1,5 puntos)**
- b) Determina, si el problema tiene solución, el número de tres cifras que he pensado. **(1 punto)**

4B. Dados los puntos $A(1, \lambda + 1, -1)$, $B(2, \lambda, 0)$ y $C(\lambda + 2, 0, 1)$, se pide:

- a) Estudia si existe algún valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para el que A , B y C estén alineados. **(1,25 puntos)**
 - b) Para $\lambda = -1$, da la ecuación implícita del plano π que contiene a los puntos A , B y C . **(1,25 puntos)**
-

PROPUESTA B

1B 2) $f(x) = \frac{\sqrt{2x-x}}{x-2}$

$$\sqrt{2x} : 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$x-2 \neq 0 : x-2=0 \Rightarrow x=2$$



$$\text{Dom}(f) = [0, +\infty) - \{2\}$$

Asíntotas:

AA.VV. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty \Rightarrow x=2$ es una A.V. de $f(x)$

AA.HH. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x-x}}{x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{2x-x}}{x}}{\frac{x-2}{x}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{2x}{x^2}} - 1}{1 - \frac{2}{x}} = -1 \Rightarrow y = -1$ es una A.H. de $f(x)$

AA.OO.

No tiene, ya que tiene A.H.

b) $g(x) = \frac{x^3}{x^2-4x+4}$

$$x^2-4x+4=0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = 2$$

$$\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{2\}$$

Asíntotas:

AA.VV. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \infty \Rightarrow x=2$ es una A.V. de $f(x)$

AA.HH. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2-4x+4} = \infty \Rightarrow$ No tiene AA.HH.

AA.OO.

$$y = mx + n$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-4x+4}}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2-4x+4} - x \right) = [\infty - \infty] =$$
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - x(x^2-4x+4)}{x^2-4x+4} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + 4x^2 - 4x}{x^2-4x+4} = 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = x + 4 \text{ es una A.O. de } f(x)$$

2B $f(x) = (x+1)e^{2x}$

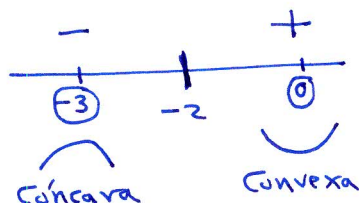
a) Concavidad, convexidad y puntos de inflexión

$$f'(x) = e^{2x} + (x+1)e^{2x} \cdot 2$$

$$f''(x) = 2e^{2x} + 2e^{2x} + 2(x+1)e^{2x} \cdot 2 = 4e^{2x} + 4(x+1)e^{2x}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow e^{2x}(4 + 4(x+1)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{2x} = 0 & \text{Nunca} \\ 4 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

Signo de f''



$$f(x) \text{ es } \begin{cases} \text{cóncava en } (-\infty, -2) \\ \text{convexa en } (-2, +\infty) \end{cases}$$

Posible punto de inflexión: $x = -2$

$$f'''(x) = 8e^{2x} + 4e^{2x} + 4(x+1)e^{2x} \cdot 2$$

$$f'''(-2) \neq 0 \Rightarrow x = -2 \text{ es un punto de inflexión de } f(x)$$

Se podría haber concluido lo mismo poniendo que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y en $x = -2$ pasa de ser cóncava a convexa.

b) $\int f(x) dx = \int (x+1)e^{2x} dx = \left[\begin{array}{l} u = x+1 \rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} dx \rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right] =$

$$= (x+1)\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} dx = \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = F(x)$$

$$F(x) \text{ pasa por el origen de coordenadas} \Leftrightarrow F(0) = 0$$

$$\frac{1}{2}e^0 - \frac{1}{4}e^0 + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, la primitiva que piden es $F(x) = \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}$

3B El n° es xyz

$$\begin{cases} y = \frac{x+z}{2} \end{cases}$$

$$100x + 10y + z - 100z - 10y - x = 198 \Rightarrow 99x - 99z = 198 \Rightarrow x - z = 2$$

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ x - z = 2 \\ x + y + z = 12 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-F_1 + F_2 \\ -F_1 + F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 12 \end{array} \right) \begin{array}{l} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [3]: $y = \frac{12}{3} = 4$

Sustituimos en [2]: $2y - 2z = 2 \Rightarrow -2z = 2 - 8 = z = \frac{-6}{-2} = 3$

Sustituimos en [1]: $x = 2y - z = 2 \cdot 4 - 3 = 5$

El n° que he pensado es 543.

4B $A(1, \lambda+1, -1)$, $B(2, \lambda, 0)$ y $C(\lambda+2, 0, 1)$

a) A, B y C alineados $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ lineal^{te} dependientes $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AB} = (2, \lambda, 0) - (1, \lambda+1, -1) = (1, -1, 1)$$

$$\overrightarrow{BC} = (\lambda+2, 0, 1) - (2, \lambda, 0) = (\lambda, -\lambda, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{-1}{-\lambda} = \frac{1}{1} \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$$

b) $\lambda = -1 \Rightarrow A(1, 0, -1)$, $B(2, -1, 0)$ y $C(1, 0, 1)$

$$\pi \equiv \text{contiene a } A, B \text{ y } C \equiv \begin{cases} A(1, 0, -1) \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2, -1, 0) - (1, 0, -1) = (1, -1, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (1, 0, 1) - (1, 0, -1) = (0, 0, 2) \end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & -1 & 0 \\ z+1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2(x-1) - 2y = -2x + 2 - 2y = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv -2x - 2y + 2 = 0}$$