



Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{xe^{\sin x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\frac{1}{x + \sin x}} \quad (1,25 \text{ puntos cada límite})$$

Nota: $\tan x$ denota a la tangente de x .

2A. a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$. **(0,5 puntos)**

b) Esboza la región encerrada entre las gráficas de $f(x)$, la recta calculada en el apartado a) y el eje de ordenadas. **(0,5 puntos)**

c) Calcula el área de la región anterior. **(1,5 puntos)**

3A. a) Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius. **(0,5 puntos)**

b) Razona que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 3y - 3z = 4 \\ 2x - y + z = 1 \\ 3x + 2y - az = 5 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

no es incompatible para ningún valor $a \in \mathbb{R}$. **(1 punto)**

c) Resuelve el sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. **(1 punto)**

4A. Dada la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

a) Da la ecuación implícita del plano π perpendicular a r que pasa por el punto $P(2, 1, 1)$. **(1,25 puntos)**

b) Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los tres puntos que resultan al hacer la intersección de π con los ejes coordenados. **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

Septiembre 2015

Propuesta A

1A) a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x e^{\sin x}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+2x}}{e^{\sin x} + x \cos x e^{\sin x}} = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+\tan x)^{\frac{1}{x+\sin x}} = [1^\infty] = e^\alpha$ donde

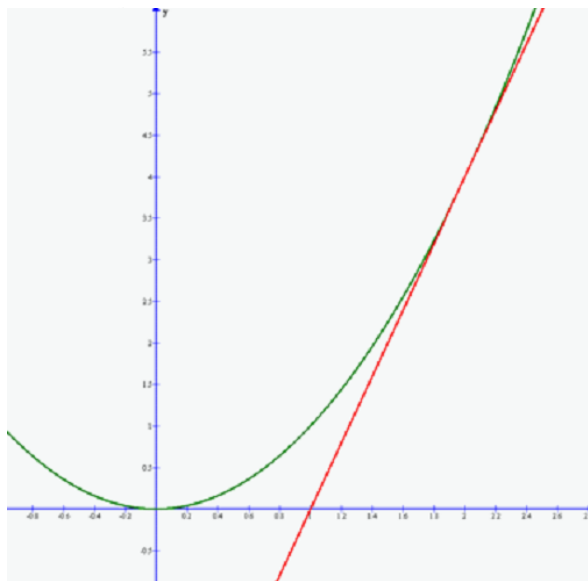
$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+\sin x} [1+\tan x - 1] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x+\sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\tan^2 x)}{1+\cos x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} (1+\tan x)^{\frac{1}{x+\sin x}} = e^{1/2}}$$

2A) a) $\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ x = 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} f'(x) = 2x \\ f'(2) = 4 \\ f(2) = 4 \end{array} \right\} \text{ Ec. de la recta tangente a } f \text{ en } x=2$

$$\boxed{y-4 = 4(x-2)}$$

b)



$y = x^2$
Vértice
 $V(0,0)$

Tabla

x	y
1	1
-1	1
2	4
-2	4

$$\begin{aligned} y-4 &= 4(x-2) \\ y-4 &= 4x-8 \\ y &= 4x-4 \end{aligned}$$

x	y
0	-4
1	0

c) Puntos de corte de las dos funciones

$$x^2 = 4x - 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$A = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x \right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{4 \cdot 2^2}{2} + 4 \cdot 2 = \frac{8}{3} \text{ u}^2$$

3A) Teorema de Rouché-Fröbenius

Un sistema de ecuaciones lineales, $AX=B$, es compatible si, y solo si, $\text{rango } A = \text{rango } (A|B)$.

b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 12 + 9 - 9 - 2 + 6a = 7a - 14 = 0 \Rightarrow a = 2$

Si $a = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-2F_1 + F_2 \\ -3F_1 + F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Discusión:

Si $a \neq 2 \Rightarrow \text{rango } A = \text{rango } (A|B) = 3 = n^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{S.C.D.}$

Si $a = 2 \Rightarrow \text{rango } A = \text{rango } (A|B) = 2 < n^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{S.C.I.}$

4A) a) El plano buscado, π , tiene como vector normal el de la recta r , que es perpendicular al vector PX , siendo X un pto genérico del plano. El producto escalar de ambos vectores es nulo y nos da la ecuación del plano pedido:

$$3x - y = 4 \Rightarrow y = 3x - 4 \Rightarrow x - z = 1 \Rightarrow z = x - 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -4 + 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}_r = (1, 3, 1)$$

$$\vec{u}_\pi = \vec{u}_r = (1, 3, 1)$$

$$\vec{PX} = (x, y, z) - (2, 1, 1) = (x-2, y-1, z-1) \quad \left. \begin{array}{l} \vec{u}_\pi \perp \vec{PX} \Rightarrow \vec{u}_\pi \cdot \vec{PX} = 0 \Rightarrow \\ \vec{PX} = (x, y, z) - (2, 1, 1) = (x-2, y-1, z-1) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow (1, 3, 1)(x-2, y-1, z-1) = 0 \Rightarrow x-2+3y-3+z-1=0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x+3y+z-6=0}$$

b) Hallamos los puntos A, B y C del plano hallado en a , que intersecan con los ejes.

$$OX \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \alpha + 3 \cdot 0 + 0 - 6 = 0 \Rightarrow \alpha = 6 \Rightarrow A \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow A(6, 0, 0)$$

$$OY \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \beta \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv 0 + 3\beta + 0 - 6 = 0 \Rightarrow \beta = 2 \Rightarrow B \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0, 2, 0)$$

$$OZ \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \gamma \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv 0 + 3 \cdot 0 + \gamma - 6 = 0 \Rightarrow \gamma = 6 \Rightarrow C \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 6 \end{cases} \Rightarrow C(0, 0, 6)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{OA} = (6, 0, 0) \\ \vec{OB} = (0, 2, 0) \\ \vec{OC} = (0, 0, 6) \end{array} \right\} \underline{V_{\text{tetrahedron}} = \frac{1}{6} |\vec{OA} \cdot (\vec{OB} \wedge \vec{OC})| = \frac{1}{6} 72 = \underline{12 u^3}}$$

$$\vec{OA} \cdot (\vec{OB} \wedge \vec{OC}) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 72$$



PROPUESTA B

1B. Determina cómo dividir un segmento de 90 cm en dos trozos, de forma que la suma del área del semicírculo cuyo diámetro es uno de ellos y el área de un triángulo rectángulo que tiene como base el otro trozo y cuya altura es π veces su base, sea mínima. **(2,5 puntos)**

Nota: Recuerda que el área de un círculo de radio r es πr^2 .

2B. Calcula las integrales

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} (4x^3 - \sqrt[4]{x}) dx, \quad \int x \ln x dx \quad (1,25 \text{ puntos por integral})$$

3B. a) Despeja X en la ecuación matricial $A \cdot X - A = 2A^2$, donde A y X son matrices cuadradas de orden 3. **(1 punto)**

b) Calcula X , siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ punto})$$

c) Calcula los determinantes de las matrices A^{101} y A^{1000} . **(0,5 puntos)**

4B. Dados el plano $\pi \equiv x + ay + 3z = 2$, $a \in \mathbb{R}$, y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

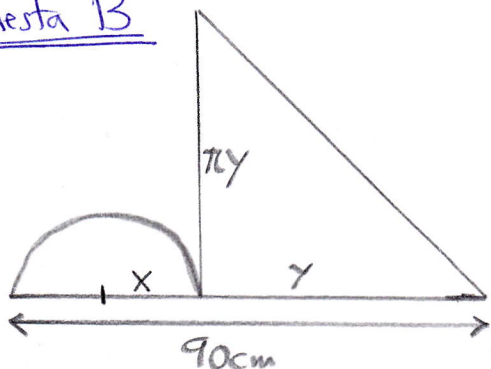
a) Halla a para que π y r se corten perpendicularmente. **(1,25 puntos)**

b) Halla a para que π y r sean paralelos. **(1,25 puntos)**

Septiembre 2015

Propuesta B

1B



$$90 = 2x + y \Rightarrow y = 90 - 2x$$

$$A = \frac{\pi x^2}{2} + \frac{y \cdot \pi y}{2} = \frac{\pi x^2 + \pi y^2}{2} = \frac{\pi}{2}(x^2 + y^2)$$

Sustituimos y en A:

$$A(x) = \frac{\pi}{2}(x^2 + (90 - 2x)^2) = \frac{\pi}{2}[x^2 + 8100 + 4x^2 - 360x] = \frac{\pi}{2}(5x^2 - 360x + 8100)$$

$$A'(x) = \frac{\pi}{2} \cdot 5 \cdot 2x - \frac{\pi}{2} \cdot 360 = 5\pi x - 180\pi$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 5\pi x - 180\pi = 0 \Rightarrow x = \frac{180\pi}{5\pi} = 36$$

$$A''(x) = 5\pi$$

$$A''(36) > 0 \Rightarrow x = 36 \text{ es un m\u00ednimo (relativo)}$$

El primer trozo mide $2 \cdot 36 = 72 \text{ cm}$ y el segundo $90 - 2 \cdot 36 = 18 \text{ cm}$.

2B a) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}(4x^3 - \sqrt[4]{x}) dx = \int \frac{4x^3 - x^{1/4}}{x^{1/2}} dx = \int 4x^{3-\frac{1}{2}} dx - \int x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} dx =$
 $= 4 \int x^{5/2} dx - \int x^{-1/2} dx = 4 \frac{1}{\frac{5}{2}+1} x^{\frac{5}{2}+1} - \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} = \frac{8}{7} \sqrt{x^7} - \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C$

b) $\int x \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \rightarrow v = \frac{1}{2} x^2 \end{array} \right] = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{x} dx =$
 $= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + C$

3B a) $AX - A = 2A^2 \Rightarrow AX = 2A^2 + A \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(2A^2 + A) \Rightarrow$
 $\Rightarrow X = A^{-1}(2A^2 + A)$

b) Cálculo de $2A^2 + A$

$$\begin{aligned} 2A^2 + A &= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cálculo de A^{-1}

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow[-F_3]{-F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{+2F_3 + F_2} \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{-2F_3 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Cálculo de X

$$\boxed{X} = A^{-1}(2A^2 + A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

"De otra forma"

$$AX - A = 2A^2 \Rightarrow A(X - I) = 2A^2 \Rightarrow A^{-1}A(X - I) = A^{-1}2A^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X - I = 2A \Rightarrow \boxed{X = 2A + I}$$

$$\begin{aligned} \boxed{X} &= 2A + I = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

c) Calculamos A^n

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es par} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ n & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$\boxed{|A^{201}|} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 201 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{-1}$$

$$\boxed{|A^{1000}|} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1000 & 1 & 1000 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{1}$$

4B a) Vector director de r :

$$y = 2x \Rightarrow x - 4x + z = -1 \Rightarrow z = -1 + 3x \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{u}_r = (1, 2, 3)$$

Vector director de π :

$$\vec{u}_\pi = (1, a, 3)$$

$$\pi \perp r \Rightarrow \vec{u}_\pi \cdot \vec{u}_r = 0 \Rightarrow (1, a, 3) \cdot (1, 2, 3) = 0 \Rightarrow 1 + 2a + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -5}$$

$$b) \pi \parallel r \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{2}{a} = \frac{3}{3} \Rightarrow \boxed{a = 2}$$