UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Calcula los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + a & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + be^x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 0$. **(1,5 puntos)**
b) Para los valores encontrados, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$. **(1 punto)**

2A. Calcula la integral definida

$$\int_0^1 (x^2 + x + 1)e^{-x}\, dx \qquad \textbf{(2,5 puntos)}$$

3A. a) Sabiendo que A es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|A| = 5$, calcula razonadamente el valor de los determinantes

$$|-A|, \qquad |A^{-1}|, \qquad |A^T|, \qquad |A^3| \qquad \textbf{(1 punto)}$$

b) Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

calcula, usando las propiedades de los determinantes,

$$\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

4A. a) Halla $a \in \mathbb{R}$ para que las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x + y - 3z = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 2y + z = a \end{cases}$$

se corten en un punto. **(1,25 puntos)**
b) Para dicho valor de a, da la ecuación implícita de un plano π que contenga a r y s. **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

PROPUESTA A

1A a) $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+a & x\le 0 \\ x^2+be^x+3 & x>0 \end{cases}$

Imponemos las condiciones que nos dan:

- f continua en $x=0$: ¿$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$?

$$\lim_{x\to 0} f(x) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} (x^2-2x+a) = a \\ \lim_{x\to 0^+} (x^2+be^x+3) = b+3 \end{array} \right\} \Rightarrow a = b+3$$

- f derivable en $x=0$: ¿$\exists f'(0)$?

$$f'(0) \left\{ \begin{array}{l} f'(x^-) = 2x-2 \longrightarrow f'(0^-) = -2 \\ f'(x^+) = 2x+be^x \longrightarrow f'(0^+) = b \end{array} \right\} b=-2$$

Resolvemos el sistema $\begin{cases} a=b+3 \\ b=-2 \end{cases}$ $\quad a = -2+3 = 1$

Por tanto, $\boxed{a=1 \text{ y } b=-2}$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+1 & x\le 0 \\ x^2-2e^x+3 & x>0 \end{cases}$

Ec. de la recta tangente a f en $x=0$: $y-y_0 = f'(0)(x-x_0)$

$$\left. \begin{array}{r} (x_0,y_0) = (0,1) \\ f'(0) = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y-1 = -2(x-0) \\ y-1 = -2x \\ \boxed{y = -2x+1} \end{array}$$

2A $\displaystyle\int_0^1 (x^2+x+1)e^{-x}\,dx$

$$\int (x^2+x+1)e^{-x}dx = \int x^2e^{-x}dx + \int xe^{-x}dx + \int e^{-x}dx$$

$$\int e^{-x}dx = -\int -e^{-x}dx = -e^{-x} + C_1$$

$$\int xe^{-x}dx = \left[\begin{array}{l} u=x \rightarrow du=dx \\ dv=e^{-x}dx \rightarrow v=-e^{-x} \end{array} \right] = -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx =$$
$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C_2$$

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = \left[\begin{array}{l} u=x^2 \longrightarrow du = 2x\,dx \\ dv = e^{-x}dx \longrightarrow v=-e^{-x} \end{array}\right] = -x^2e^{-x} - \int -2xe^{-x}dx =$$

$$= -x^2e^{-x} + 2\underbrace{\int xe^{-x}dx}_{\text{la hemos calculado antes}} = -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} - e^{-x}\right) =$$

$$= e^{-x}\left(-x^2-2x-2\right) + C_3$$

Así $\displaystyle\int_0^1 (x^2+x+1)e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^1 + \left(-xe^{-x} - e^{-x}\right)\Big|_0^1 +$

$$+ e^{-x}\left(-x^2-2x-2\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{e} + 1 + \left(\frac{-2}{e}\right) + 1 + \left(\frac{-5}{e}\right) + 2 =$$

$$= \frac{-1+e-2+e-5+2e}{e} = \boxed{\frac{4e-8}{e}\ u}$$

$\boxed{3A}$ a) $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ t.q. $|A| = 5$

$\boxed{|-A| = |A| = 5}$ ya que si multiplicamos una fila o una columna por un nº real, el valor del determinante queda multiplicado por dicho nº, y al calcular $-A$ estamos multiplicando dos filas (o columnas) por -1.

$$\boxed{|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{5}}$$

$$\boxed{|A^T| = |A| = 5}$$

$$\boxed{|A^3| = |AAA| = |A||A||A| = 5\cdot5\cdot5 = 125}$$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$$\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} + \underbrace{3\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix}}_{=0} = 3\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} -$$

$$-3\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\cdot 2 = \boxed{-6}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = +5 \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 30 & 0 & 10 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = +5\cdot 2\cdot 10\cdot 4 \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -400 \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -400\cdot 2 = \boxed{-800}$$

$\boxed{4A}$ a) $r \equiv \begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x+y-3z=2 \end{cases}$ $\quad s \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ 3x+2y+z=a \end{cases}$

Para que r y s se corten en un punto el sistema tiene que ser compatible determinado, esto es, rango M = rango $\tilde{M} = 3$ donde M es la matriz de coeficientes y $\tilde{M}$ la matriz ampliada.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$|\tilde{M}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} =$$

$$= -6a+1-4+6-4+a-(-3a-1-6+9-2-a) =$$

$$= -5a-1+4a = -a-1 = 0 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow \text{rango } \tilde{M} \leq 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2-3 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } \tilde{M} = 3 = \text{rango } M$$

b) π queda determinado por $\vec{u}_r = (-5,4,3)$, $\vec{u}_s = (-1,1,1)$ y $\vec{RP}$ donde $R(-1,1,0)$ es un punto cualquiera de la recta r y P es un punto genérico del plano: $P(x,y,z)$

$$\vec{RP} = (x,y,z)-(-1,1,0) = (x+1, y-1, z)$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ -5 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4(x+1)-3(y-1)-5z+4z-3(x+1)+5(y-1)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv x+2y-z-1=0}$$

PROPUESTA B

1B. a) Calcula los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 1 + x^2 e^{-x^2}$. **(1,5 puntos)**
b) Calcula las asíntotas de $f(x)$. **(1 punto)**

2B. Para cada $c \geq 2$ definimos $A(c)$ como el área de la region encerrada entre la gráfica de

$$f(x) = \frac{1+x^2}{x^4}$$

el eje de abscisas, y las rectas $x = 1$ y $x = c$.
a) Calcula $A(c)$. **(1,5 puntos)**
b) Calcula

$$\lim_{c \to +\infty} A(c) \qquad \textbf{(1 punto)}$$

3B. a) Se sabe que el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 2x & - & y & + & z & = & 8 \\ x & - & 5y & + & az & = & 4 \end{array} \right. \qquad a \in \mathbb{R}$$

es compatible indeterminado. Calcula a y resuelve el sistema para dicho valor del parámetro. **(2 puntos)**
b) Para el valor de a encontrado, da una solución particular del sistema tal que $x = y$. **(0,5 puntos)**

4B. Dados el plano $\pi \equiv x - y = 4$ y la recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + z = 1 \\ 2x + y + az = 0 \end{array} \right. \qquad a \in \mathbb{R},$$

se pide:
a) Estudia si existe algún valor del parámetro a para el que r y π sean paralelos. **(0,75 puntos)**
b) Estudia si existe algún valor del parámetro a para el que r y π se corten perpendicularmente. **(0,75 puntos)**
c) Para $a = 1$, da la ecuación implícita de un plano π' que contenga a r y corte perpendicularmente a π. **(1 punto)**

PROPUESTA B

1B a) Monotonía de f

$$f'(x) = 2xe^{-x^2} + (-2x)x^2e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}(1-x^2)$$

$$f'(x) = 0 \iff 2xe^{-x^2}(1-x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 1-x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

	-1		0		1	
$-$		$+$		$-$		$+$
$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$\boxed{f \text{ es } \begin{cases} \text{creciente en } (-1,0) \cup (1,+\infty) \\ \text{decreciente en } (-\infty,-1) \cup (0,1) \end{cases}}$$

$$f''(x) = 2e^{-x^2}(1-3x^2) + 4x^2e^{-x^2}(x^2-1)$$

$f''(-1) > 0 \Rightarrow$ $\boxed{x = -1 \text{ es un mín. rel. de } f.}$

$f''(0) < 0 \Rightarrow$ $\boxed{x = 0 \text{ es un máx. rel. de } f}$

$f''(1) > 0 \Rightarrow$ $\boxed{x = 1 \text{ es un mín. rel. de } f}$

b) Asíntotas

A.V. $f(x) = 1 + \dfrac{x^2}{e^{x^2}} = \dfrac{e^{x^2} + x^2}{e^{x^2}}$

Como $e^{x^2} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, $\nexists\, a \in \mathbb{R}$ t.q. $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y por tanto,

$\boxed{f(x) \text{ no tiene A.V.}}$

A.H. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x^2} + x^2}{e^{x^2}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2xe^{x^2} + 2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x(e^{x^2}+1)}{2xe^{x^2}} =$

$= \lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{e^{x^2}} = 1 + 0 = 1 \Rightarrow$ $\boxed{y = 1 \text{ es una A.H.}}$

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{e^{x^2} + x^2}{e^{x^2}} = \ldots = \lim_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{e^{x^2}} = 1$

A.O. $\boxed{\text{No tiene}}$, ya que tiene asíntota horizontal.

2B a) $\boxed{A(c)} = \int_1^c f(x)dx = \int_1^c \frac{1+x^2}{x^4}dx = \int_1^c \frac{1}{x^4}dx + \int_1^c \frac{x^2}{x^4}dx =$

$= \int_1^c x^{-4}dx + \int_1^c x^{-2}dx = -\frac{1}{3}x^{-3}\Big|_1^c + (-1)x^{-1}\Big|_1^c =$

$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{1^3}\right) + (-1)\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{1}\right) = \frac{c^3-1}{3c^3} + \frac{c-1}{c} = \boxed{\frac{4c^3-3c^2-1}{3c^3}}$

b) $\boxed{\lim_{c\to\infty} A(c) = \lim_{c\to\infty} \frac{4c^3-3c^2-1}{3c^3} = \frac{4}{3}}$ resolviendo la indeterminación correspondiente

3B a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -5 & a & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & a-3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_3}$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & a-8 & 0 \end{array}\right)$

Para que el sistema sea compatible indeterminado $a-8=0 \Rightarrow \boxed{a=8}$

Solución

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ \end{array}$

Hacemos $z=\lambda$

De [2]: $3y-5\lambda=0 \Rightarrow y=\frac{5}{3}\lambda$

Sustituyendo en [1]:

$x - 2\frac{5}{3}\lambda + 3\lambda = 4 \Rightarrow x = 4+\frac{1}{3}\lambda$

Solución: $\boxed{(x,y,z) = \left(4+\frac{1}{3}\lambda, \frac{5}{3}\lambda, \lambda\right), \text{ con } \lambda\in\mathbb{R}}$

b) Si $x=y \Rightarrow 4+\frac{1}{3}\lambda = \frac{5}{3}\lambda \Rightarrow \frac{4}{\frac{4}{3}} = \lambda \Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{(x,y,z) = (5,5,3)}$

4B a) $r \parallel \pi \Rightarrow \vec{u}_r \perp \vec{u}_\pi \Rightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi = 0$

Vector director de r: $\vec{u}_r$

$x+z=1 \Rightarrow z = 1-x \Rightarrow$ (sust. en la otra ec.) $2x+y+a(1-x)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y+2x-ax+a=0 \Rightarrow y=(a-2)x-a \Rightarrow \vec{u}_r=(1,a-2,-1)$

Vector normal de π: $\vec{u}_\pi$

$\vec{u}_\pi = (1,-1,0)$

Producto escalar

$\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi = (1, a-2, -1)\cdot(1,-1,0) = 0 \Rightarrow 1 - a + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a=3}$

b) Si son perpendiculares, el vector director de la recta y el normal del plano tienen que ser iguales o proporcionales

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}_r = (1, a-2, -1)\\ \vec{u}_\pi = (1,-1,0)\end{array}\right\} \quad \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{0} \Rightarrow \boxed{\text{No pueden ser perpendiculares}}$$

c) $\pi' \begin{cases} \vec{u}_r \equiv \text{vector director de } r \\ \vec{u}_\pi \equiv \text{vector normal de } \pi \\ \overrightarrow{RP} \text{ donde } R \in r \text{ (cualquiera) y } P(x,y,z) \in \pi \text{ (genérico)} \end{cases}$

$R(0,-1,1)$

$\overrightarrow{RP} = (x,y,z) - (0,-1,1) = (x, y+1, z-1)$

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(y+1) - (z-1) + (z-1) - x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi' \equiv x + y + 1 = 0}$$