



Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad de la función

$$f(x) = \frac{x-1}{2x+2}$$

Estudia si tiene puntos de inflexión. **(1,5 puntos)**

b) ¿En qué puntos de la gráfica de $f(x)$ la recta tangente es paralela a la recta $y = x - 2$? **(1 punto)**

2A. a) Esboza la región encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = \sin x$, $g(x) = -\sin x$, y las rectas $x = \pi/2$ y $x = 3\pi/2$. **(0,5 puntos)**

b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3A. a) Discute, en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ m+1 & 3 & m-1 \\ m-1 & m+3 & -1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(2 puntos)}$$

b) ¿Para qué valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ existe la matriz inversa de A ? **(0,5 puntos)**

4A. a) Estudia la posición relativa de las rectas

$$r \equiv x = -y = z \quad \text{y} \quad s \equiv x = y = z - 2. \quad \textbf{(1,25 puntos)}$$

b) Calcula la distancia entre r y s . **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

Propuesta A

1A) 2) Curvatura (concavidad/conconvexidad) : signo de f''

$$f(x) = \frac{x-1}{2x+2} \quad \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$f'(x) = \frac{2x+2 - (x-1) \cdot 2}{(2x+2)^2} = \frac{4}{(2x+2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4 \cdot 2(2x+2) \cdot 2}{(2x+2)^4} = \frac{-16(2x+2)}{(2x+2)^4}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -16(2x+2) > 0 \Rightarrow 2x+2 < 0 \Rightarrow x < -1$$

$$f \text{ en } \begin{cases} \text{convexa si } x < -1, \text{ es decir, en } (-\infty, -1) \\ \text{cóncava si } x > -1, \text{ es decir, en } (-1, +\infty) \end{cases}$$

No tiene puntos de inflexión, ya que los puntos de inflexión son los puntos en los que la función pasa de cóncava a convexa, o viceversa.

b) $y = x - 2$ tiene pendiente 1

Por tanto, busquemos los puntos en los que f' valga 1:

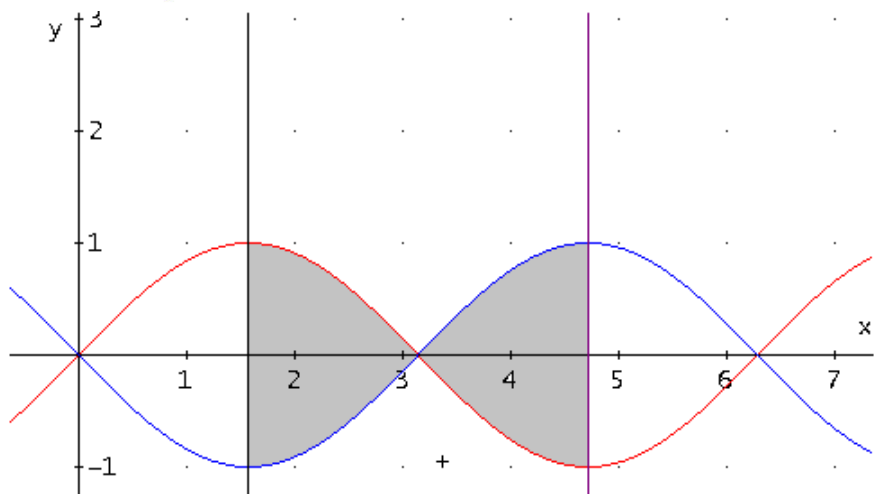
$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{(2x+2)^2} = 1 \Rightarrow 4 = (2x+2)^2 \Rightarrow 4 = 4x^2 + 4 + 8x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 8x = 0 \Rightarrow 4x(x+2) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$$

Así, la gráfica de $f(x)$ tiene recta tangente paralela a $y = x - 2$

en $(0, f(0)) = (0, -\frac{1}{2})$ y en $(-2, f(-2)) = (-2, \frac{3}{2})$

2A) 3) Esbozo de la gráfica



$$\begin{aligned} b) A &= \int_{\pi/2}^{2\pi} (\sin x - (-\sin x)) dx + \\ &+ \int_{2\pi}^{3\pi/2} (-\sin x - \sin x) dx = \\ &= \int_{\pi/2}^{2\pi} 2 \sin x dx - 2 \int_{2\pi}^{3\pi/2} \sin x dx = \\ &= 2 \left(\cos x \Big|_{\pi/2}^{2\pi} \right) - 2 \left(\cos x \Big|_{2\pi}^{3\pi/2} \right) = \\ &= \boxed{4} \end{aligned}$$

3A) a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ m+1 & 3 & m-1 \\ m-1 & m+3 & -1 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ m+1 & 3 & m-1 \\ m-1 & m+3 & -1 \end{vmatrix} = -3 - (m+1)(m+3) + 3(m-1)^2 + 3(m-1) - (m+3)(m-1) + 3(m+1) = m^2 - 6m = 0 \Rightarrow m(m-6) = 0 \Rightarrow m = \begin{cases} 0 \\ 6 \end{cases}$$

Si $m \neq \begin{cases} 0 \\ 6 \end{cases} \Rightarrow \text{rg } A = 3$

$m = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = 2$

$m = 6 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 7 & 3 & 5 \\ 5 & 9 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = 2$

Discusión: Si $m \neq \begin{cases} 0 \\ 6 \end{cases} \Rightarrow \text{rg } A = 3$
Si $m = \begin{cases} 0 \\ 6 \end{cases} \Rightarrow \text{rg } A = 2$

b) $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \begin{cases} 0 \\ 6 \end{cases}$

4A) a) $r \equiv x = -y = z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -y \Rightarrow x + y = 0 \\ x = z \Rightarrow x - z = 0 \end{cases}$
 $s \equiv x = y = z - 2 \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = y \Rightarrow x - y = 0 \\ x = z - 2 \Rightarrow x - z = -2 \end{cases}$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Rango de M

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } M = 3$

Rango de $\tilde{M}$

$|\tilde{M}| = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg } \tilde{M} = 4$

$\Rightarrow$ r y s se cruzan

De otra forma

$\vec{u}_r = (1, -1, 1)$

$\vec{u}_s = (1, 1, 1)$

$P_r(0, 0, 0) \in r, P_s(0, 0, 2), \vec{P_r P_s} = (0, 0, 2)$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ r y s se cruzan

$$b) d(r,s) = \left| \frac{\det(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{P_r P_s})}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} \right|$$

$$\vec{u}_r \times \vec{u}_s = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{k} = (-2, 0, 2)$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$\boxed{d(r,s) = \frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{4\sqrt{8}}{8} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2} \text{ u}}$$



Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. Para la función $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

- a) Estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus extremos relativos. **(1,5 puntos)**
b) Estudia si tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$. **(1 punto)**

2B. Calcula las integrales

$$\int \frac{e^x}{e^x - e^{-x}} dx, \quad \int \frac{2}{4 + x^2} dx \quad \textbf{(1,25 puntos por cada integral)}$$

Nota: En la primera integral puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = e^x$.

3B. Encuentra dos matrices A, B cuadradas de orden 2 que sean solución del sistema matricial

$$\begin{cases} 2A + B = C^2 \\ A - B = C^{-1} \end{cases}$$

siendo

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \textbf{(2,5 puntos)}$$

4B. a) Estudia, en función del valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, la posición relativa de los planos

$$\pi_1 \equiv x + y - z = 3$$

$$\pi_2 \equiv x - y + az = -1$$

$$\pi_3 \equiv ax + y - z = 5$$

(1,5 puntos)

- b) Calcula, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, la distancia entre los planos π_1 y π_3 . **(1 punto)**
-

Propuesta B

1B $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ Dom $(f) = \mathbb{R}$

3) Monotonía (crecimiento/decrecimiento): signo de f'

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$$

$$f \text{ es } \begin{cases} \text{creciente en } (-\frac{1}{2}, +\infty) \\ \text{decreciente en } (-\infty, -\frac{1}{2}) \end{cases}$$

Como f es continua en $\mathbb{R}$ por ser composición de funciones continuas y en $x = -\frac{1}{2}$ pasa de ser decreciente a ser creciente, se tiene que $x = -\frac{1}{2}$ es un mínimo relativo.

b) La asíntota oblicua, si existe, es de la forma $y = mx + n$ con

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2+x+1} - x] = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1} - x)(\sqrt{x^2+x+1} + x)}{\sqrt{x^2+x+1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1} + x} =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}$$

Así, la asíntota oblicua es $y = x + \frac{1}{2}$

2B a) $\int \frac{e^x}{e^x - e^{-x}} dx = \left[\begin{matrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{matrix} \right] = \int \frac{1}{t^2 - 1} dt =$ (*)

$$= \int \frac{\frac{1}{2}}{t-1} dt + \int \frac{\frac{1}{2}}{t+1} dt = \frac{1}{2} \log|t-1| + \frac{1}{2} \log|t+1| =$$

$$= \frac{1}{2} \log |e^x - 1| + \frac{1}{2} \log |e^x + 1| + C \quad \text{donde } \log \equiv \text{logaritmo natural}$$

Cipri

$$(*) \quad \frac{1}{t^2 - 1} = \frac{A}{t - 1} + \frac{B}{t + 1} \Rightarrow 1 = A(t + 1) + B(t - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2} \\ t = -1 \Rightarrow -1 = -2B \Rightarrow B = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{t^2 - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{t - 1} + \frac{\frac{1}{2}}{t + 1}$$

De otra forma: $\int \frac{e^x}{e^x - e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{e^x - \frac{1}{e^x}} dx = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 1} dx =$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 1} dx = \frac{1}{2} \log |e^{2x} - 1| + C$$

$$b) \int \frac{2}{4 + x^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{2}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \arctg\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$\boxed{3B} \quad \begin{aligned} 2A + B &= C^2 \\ A - B &= C^{-1} \end{aligned}$$

Sumamos $3A = C^2 + C^{-1} \Rightarrow A = \frac{1}{3}(C^2 + C^{-1})$

Como $A - B = C^{-1} \Rightarrow B = A - C^{-1} = \frac{1}{3}(C^2 + C^{-1}) - C^{-1}$

Calculamos C^2

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 12 & 31 \end{pmatrix}$$

Calculamos C^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-2F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{-3F_2 + F_1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos A

$$\boxed{A = \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 12 & 31 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 21 \\ 14 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 7 \\ 14/3 & 10 \end{pmatrix}}$$

Calculamos B

$$\boxed{B = A - C^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 7 \\ 14/3 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/3 & 4 \\ 8/3 & 11 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{4B} \quad \pi_1 \equiv x+y-z=3$$

$$\pi_2 \equiv x-y+az=-1$$

$$\pi_3 \equiv 2x+y-z=5$$

a) Posición relativa

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ a & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|M| = 1 - 1 + a^2 - a - a + 1 = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

Si: $\boxed{a \neq 1} \Rightarrow \text{rg } M = 3 = \text{rg } \tilde{M} \Rightarrow \text{Los 3 planos son secantes en un punto}$

$$\boxed{a = 1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg } M = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg } \tilde{M} = 3$$

Estudiamos los rangos de las submatrices de orden 2×3 de M

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango} = 1$$

Dos planos son paralelos y el tercero los corta según dos rectas paralelas

$$b) \boxed{d(\pi_1, \pi_3) = d(P_{\pi_1}, \pi_3) = \frac{|0+0+3-5|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} u}$$

$$P_{\pi_1}(0,0,3)$$