Junio 2013

UCLM
UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el Teorema de Bolzano. **(0,5 puntos)**

b) Razona que las gráficas de las funciones $f(x) = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 3$ y $g(x) = e^x$ se cortan en algún punto con coordenada de abscisa entre -1 y 0. **(1 punto)**

c) Calcula los puntos de inflexión de $f(x)$. **(1 punto)**

2A. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que el valor (en unidades de superficie) del área de la región determinada por la parábola $f(x) = -x^2 + a^2$ y el eje de abscisas, coincida con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -a$. **(2,5 puntos)**

3A. a) Encuentra dos matrices A, B cuadradas de orden 2 que cumplan:

- Su suma es la matriz identidad de orden 2.
- Al restar a la matriz A la matriz B se obtiene la traspuesta de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$ **(1,5 puntos)**

b) Si M es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|M| = 7$, razona cuál es el valor de los determinantes $|M^2|$ y $|2M|$. **(1 punto)**

4A. a) Estudia la posición relativa del plano $\pi \equiv x - y - z = a$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y + az = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. **(1,25 puntos)**

b) Calcula la distancia entre π y r para cada valor de $a \in \mathbb{R}$. **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

Junio 2013

Propuesta A

(1A) a) Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$, y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo ($\text{sig} f(a) \neq \text{sig} f(b)$), entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(c)=0$.

b) Consideramos la función

$$h(x) = f(x) - g(x) = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 3 - e^x$$

La función $h(x)$ verifica:

h es continua en $[-1,0]$, ya que es continua en $\mathbb{R}$, por ser suma de una función polinómica y una exponencial.

$$h(-1) = 3(-1)^5 - 10(-1)^4 + 10(-1)^3 + 3 - e^{-1} = -20 - \frac{1}{e} < 0$$

$$h(0) = 3\cdot 0^5 - 10\cdot 0^4 + 10\cdot 0^3 + 3 - e^0 = 2 > 0$$

Aplicando el teorema de Bolzano, $\exists c \in (-1,0)$ t.q. $h(c)=0$, esto es $f(c)-g(c)=0 \Rightarrow f(c)=g(c)$, es decir, c es el punto de corte de f y g.

c) $f'(x) = 15x^4 - 40x^3 + 30x^2$

$f''(x) = 60x^3 - 120x^2 + 60x = 60x(x^2-2x+1)$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 60x = 0 \Rightarrow x=0 \\ x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=0 \text{ y } x=1 \text{ son posibles puntos de inflexión.}$$

$f'''(x) = 180x^2 - 240x + 60$

$$\left.\begin{array}{l} f'''(0) = 60 \neq 0 \\ f'''(1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{f \text{ tiene un punto de inflexión en } x=0}$$

(2A) Puntos de corte con el eje OX

$f(x)=0 \Rightarrow -x^2+a^2=0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{a^2} = \pm a$

Signo de $f(x)$

$f(0) = a^2 > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ en $(-a,a)$

Área

$$A=\int_{-a}^{a}(-x^2+a^2)\,dx=-\frac{x^3}{3}+a^2x\Big]_{-a}^{a}=-\frac{a^3}{3}+a^3-\left(-\frac{-a^3}{3}-a^3\right)=$$

$$=-\frac{a^3}{3}+a^3-\frac{a^3}{3}+a^3=\frac{4a^3}{3}$$

Pendiente

$f'(x)=-2x$

$f'(-a)=2a$

Solución

$$\frac{4a^3}{3}=2a \Rightarrow 4a^3-6a=0 \Rightarrow 2a(2a^2-3)=0 \Rightarrow a=\begin{cases}0\\ \pm\frac{\sqrt{6}}{2}\end{cases}$$

Por tanto, $\boxed{a=\frac{\sqrt{6}}{2}}$

3A a) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \\ A-B=\begin{pmatrix}a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12}\\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}a_{11}+b_{11}=1 & [1]\\ a_{12}+b_{12}=0 & [2]\\ a_{21}+b_{21}=0 & [3]\\ a_{22}+b_{22}=1 & [4]\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_{11}-b_{11}=1 & [5]\\ a_{12}-b_{12}=3 & [6]\\ a_{21}-b_{21}=2 & [7]\\ a_{22}-b_{22}=4 & [8]\end{cases}$$

$[1]+[5]$: $2a_{11}=2 \Rightarrow a_{11}=1$

Sustituimos en $[1]$: $b_{11}=0$

$[2]+[6]$: $2a_{12}=3 \Rightarrow a_{12}=\frac{3}{2}$

Sustituimos en $[2]$: $b_{12}=-\frac{3}{2}$

$[3]+[7]$: $2a_{21}=2 \Rightarrow a_{21}=1$

Sustituimos en $[3]$: $b_{21}=-1$

$[4]+[8]$: $2a_{22}=5 \Rightarrow a_{22}=\frac{5}{2}$

Sustituimos en $[4]$: $b_{22}=-\frac{3}{2}$

Por tanto, $\boxed{A=\begin{pmatrix}1 & 3/2\\ 1 & 5/2\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}0 & -3/2\\ -1 & -3/2\end{pmatrix}}$

b) $\boxed{|M^2|}=|MM|=|M||M|=7^2=\boxed{49}$

$\boxed{|2M|}=2^2|M|=4\cdot 7=\boxed{28}$

4A) a) Si el producto escalar del vector normal del plano y el vector director de la recta es nulo, la recta y el plano son paralelos o la recta está contenida en el plano. En este último caso, tendrán algún punto en común.
De no ser cero el producto escalar, la recta y el plano se cortan en un plano.

- $x = 2y \Rightarrow 2 \cdot 2y + y + az = 0 \Rightarrow 5y + az = 0 \Rightarrow z = -\frac{5}{a} y \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{u}_r = \left(2, 1, -\frac{5}{a}\right)$

- $\vec{n}_\pi = (1, -1, -1)$
- $\vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r = (1,-1,-1) \cdot \left(2, 1, -\frac{5}{a}\right) = 2 - 1 + \frac{5}{a} = 1 + \frac{5}{a}$

$\vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r = 0 \Rightarrow a = -5$

- Si $a = -5 \Rightarrow r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2a\lambda = -10\lambda \\ y = a\lambda = -5\lambda \\ z = -5\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow R(0,0,0) \in r$ y sustituyendo

en la ecuación del plano: $0 - 0 - 0 \neq -5 \Rightarrow R \notin \pi$

Discusión:

Si $a \neq -5 \Rightarrow r$ y π se cortan en un punto.

Si $a = -5 \Rightarrow r$ y π son paralelos

b) $\forall a \in \mathbb{R} - \{-5\}$, r y π se cortan en un punto $\Rightarrow d(r, \pi) = 0$

Si $a = -5 \Rightarrow x - y - z = -5 \Rightarrow \pi \equiv x - y - z + 5 = 0$

$$d(r, \pi) = d(R, \pi) = \frac{|0 - 0 - 0 + 5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ u}$$

UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. a) Calcula los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x + 1}$$

tenga como asíntota oblicua la recta $y = 2x + 3$. **(1,5 puntos)**

b) Para los valores encontrados, escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisas $x = 0$. **(1 punto)**

2B. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{2\,\text{sen}x\,\cos x}{1 + \text{sen}^2 x}\,dx, \qquad \int \frac{x^2 + x - 4}{x^3 - 4x}\,dx \qquad \textbf{(1,25 puntos por integral)}$$

3B. a) Sabiendo que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, calcula los determinantes

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta. **(2 puntos)**

b) Razona que, puesto que $|A| = 2$, los parámetros a, b y c deben ser distintos entre sí (no puede haber dos iguales). **(0,5 puntos)**

4B. a) Estudia la posición relativa de las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ x + 2y - z = 12 \end{cases} \qquad \textbf{(1,25 puntos)}$$

b) Calcula la distancia entre las rectas r y s. **(1,25 puntos)**

$\boxed{\text{Junio 2013}}$

$\boxed{\text{Propuesta B}}$

1B a) $y = mx + n = 2x + 3$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{ax^2+bx}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx}{x(x+1)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx}{x^2+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{ax^2}{x^2}+\frac{bx}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{a+\frac{b}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \boxed{a=2}$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2+bx}{x+1} - 2x\right] = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+bx-2x(x+1)}{x+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{2x^2}+bx-\cancel{2x^2}-2x}{x+1}\right) =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{bx}{x}-\frac{2x}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{b-2}{1+\frac{1}{x}} = b-2 = 3 \Rightarrow \boxed{b=5}$$

b) $f(x) = \dfrac{2x^2+5x}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{(4x+5)(x+1) - (2x^2+5x)\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$\left.\begin{array}{l} f'(0) = 5 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\}$ La ec. de la recta tangente a f en $x=0$ es:

$$y - f(0) = f'(0)(x-0)$$

$$\boxed{y = 5x}$$

2B a) $$\int \frac{2\,\text{sen}\,x\cos x}{1+\text{sen}^2 x}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = 1+\text{sen}^2 x \\ dt = 2\,\text{sen}\,x\cos x\,dx \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t} = \log t =$$

$= \boxed{\log(1+\text{sen}^2 x) + C}$ donde log es el logaritmo natural.

b) $$\int \frac{x^2+x-4}{x^3-4x}\,dx$$

Descomponemos $\dfrac{x^2+x-4}{x^3-4x}$ en fracciones simples:

$$x^3 - 4x = x(x^2-4) = x(x+2)(x-2)$$

$$\frac{x^2+x-4}{x^3-4x}=\frac{x^2+x-4}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}=\frac{A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)}$$

$$\Rightarrow A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)=x^2+x-4$$

$x=2 \Rightarrow A(2-2)(2+2)+2B(2+2)+2C(2-2)=2^2+2-4 \Rightarrow B=\frac{1}{4}$

$x=0 \Rightarrow A(0-2)(0+2)+B\cdot 0(0+2)+C\cdot 0(0-2)=0^2+0-4 \Rightarrow A=1$

$x=-2 \Rightarrow A(-2-2)(-2+2)+B(-2)(-2+2)+C(-2)(-2-2)=(-2)^2+(-2)-4 \Rightarrow C=-\frac{1}{4}$

$$\frac{x^2+x-4}{x^3-4x}=\frac{1}{x}+\frac{\frac{1}{4}}{x-2}+\frac{-\frac{1}{4}}{x+2}$$

Calculamos la integral:

$$\int\frac{x^2+x-4}{x^3-4x}dx=\int\frac{1}{x}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+2}dx=$$

$$\boxed{=\log x+\frac{1}{4}\log(x-2)-\frac{1}{4}\log(x+2)+C}$$ donde log es el logaritmo natural

3B a) $|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=2$

$$\begin{vmatrix}a-1&b-1&c-1\\a^2-1&b^2-1&c^2-1\\5&5&5\end{vmatrix}\underset{[1]}{=}\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2-1&b^2-1&c^2-1\\5&5&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1\\a^2-1&b^2-1&c^2-1\\5&5&5\end{vmatrix}=$$

$$\underset{[1]}{=}\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\5&5&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a&b&c\\-1&-1&-1\\5&5&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1\\a^2&b^2&c^2\\5&5&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\5&5&5\end{vmatrix}=$$

$$\underset{\substack{[2]\\[3]\\[4]}}{=}5\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}+5(-1)\underbrace{\begin{vmatrix}a&b&c\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}}_{=0}+5\underbrace{\begin{vmatrix}1&1&1\\a^2&b^2&c^2\\1&1&1\end{vmatrix}}_{=0}+(-1)\underbrace{\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\5&5&5\end{vmatrix}}_{=0}=$$

$$=5\cdot 2=\boxed{10}$$

[1]: Un determinante, con una fila o columna formada por la suma de dos números, puede descomponerse en suma de otros dos determinantes que tienen las mismas filas o columnas restantes y, en lugar de aquella, otra formada por los primeros y segundos sumandos, respectivamente.

[2]: Si multiplicamos una fila o columna por un nº, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

[3]: El determinante de una matriz con dos filas o columnas iguales es cero.

[4]: Si se intercambian dos filas o dos columnas, cambia el signo del determinante.

$$\begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+2a+1 & b^2+2b+1 & c^2+2c+1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{[3]}{\overset{[1]}{=}} \underbrace{\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{[3]}{\overset{[2]}{=}} 2 \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}}_{=0} + 2 \boxed{=2}$$

b) $$2 = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[-a^2F_1+F_3]{-aF_1+F_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b+a)(b-a) & (c+a)(c-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)\left[c+a-(b+a)\right] = (b-a)(c-a)(c-b) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-a \neq 0 \Rightarrow \boxed{b \neq a} \\ c-a \neq 0 \Rightarrow \boxed{c \neq a} \\ c-b \neq 0 \Rightarrow \boxed{c \neq b} \end{cases}$$

4B

a) $$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow y=1 \Rightarrow x+1-z=1 \Rightarrow x=z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}_r = (1,0,1)$$

$$s \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ x+2y-z=12 \end{cases} \Rightarrow x=z \Rightarrow z+2y-z=12 \Rightarrow y=6 \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=\mu \\ y=6 \\ z=\mu \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}_s = (1,0,1)$$

Como $\vec{u}_r = \vec{u}_s$ y $P_r(0,1,0) \notin s$, se tiene que $\boxed{\text{las rectas son paralelas}}$

b) $R(0,1,0)$

$\left.\begin{array}{l}\vec{n}_\pi = \vec{u}_r = \vec{u}_s = (1,0,1) \\ \vec{RG} = (x,y,z)-(0,1,0) = (x, y-1, z)\end{array}\right\} \vec{n}_\pi \perp \vec{RG} \Rightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{RG} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1,0,1)\cdot(x, y-1, z) = 0 \Rightarrow$

$G \in \pi$ (genérico)

$\pi \equiv x + z = 0$

Como $\pi \equiv x+z=0 \Rightarrow \mu+\mu=0 \Rightarrow \mu=0 \Rightarrow S\begin{cases} x=0 \\ y=6 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow S(0,6,0)$

Se tiene que:

$\boxed{d(r,s) = d(R,S) = \sqrt{(0-0)^2+(6-1)^2+(0-0)^2} = 5u}$