Septiembre 2013

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{ax}, & \text{si } x < 0 \\[2ex] \left(\dfrac{2x+7}{2x+1}\right)^x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$. **(1,25 puntos)**

b) Calcula el límite

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad \textbf{(1,25 puntos)}$$

2A. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{1 + x + \sqrt{x}}{x^2}\,dx, \qquad \int \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2}\,dx \qquad \textbf{(1,25 puntos por integral)}$$

Observación: El cambio de variable $t = e^x$ puede ayudarte a calcular la segunda integral.

3A. a) Despeja X en la ecuación matricial $X \cdot A - B = 2X$, donde A, B y X son matrices cuadradas de orden 3. **(1,25 puntos)**

b) Calcula X, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1,25 puntos)}$$

4A. a) Estudia la posición relativa de las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = a \end{cases}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. **(2 puntos)**

b) Encuentra el punto de corte de las rectas en el caso en que sean secantes. **(0,5 puntos)**

(sigue a la vuelta)

Septiembre 2013

Propuesta A

1A
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-e^{-x}}{ax} & \text{si } x<0\\[2mm] \left(\dfrac{2x+7}{2x+1}\right)^x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

a) Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio, por ser funciones elementales, cuyos denominadores no se anulan.

Continuidad en $x=0$: ¿ $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$?

$$\lim_{x\to 0} f(x)\begin{cases}\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{e^x-e^{-x}}{ax}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0^-}\dfrac{e^x+e^{-x}}{a}=\dfrac{2}{a}\\[2mm] \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2x+7}{2x+1}\right)^x=7^0=1=f(0)\end{cases}\Rightarrow a=2$$

Para $\boxed{a=2}$, f es continua.

b) $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+7}{2x+1}\right)^x=[1^\infty]=e^\alpha \text{ donde}$$

$$\alpha=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{2x+7}{2x+1}-1\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\cancel{2x}+7-\cancel{2x}-1}{2x+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{2x+1}=\frac{6}{2}=3$$

Por tanto, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=e^3}$

2A a) $$\int\frac{1+x+\sqrt{x}}{x^2}dx=\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{x}{x^2}dx+\int\frac{\sqrt{x}}{x^2}dx=$$

$$=\int x^{-2}dx+\int\frac{1}{x}dx+\int x^{-3/2}dx=\frac{x^{-1}}{-1}+\log x+\frac{x^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\boxed{-\frac{1}{x}+\log x-2\frac{1}{\sqrt{x}}+C}$$

b) $$\int\frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}dx=\begin{bmatrix}t=e^x\\ dt=e^x dx\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{t^2-3t+2}$$

Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{1}{t^2-3t+2}=\frac{1}{(t-1)(t-2)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t-2}=\frac{A(t-2)+B(t-1)}{(t-1)(t-2)}=$$

$$= \frac{At - 2A + Bt - B}{(t-1)(t-2)} = \frac{(A+B)t + (-2A-B)}{(t-1)(t-2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A+B)t + (-2A-B) = 1 \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \Rightarrow A=-B \\ -2A-B=1 \end{cases}$$

$$+2B - B = 1 \Rightarrow B = 1 \Rightarrow A = -1$$

Calculamos la integral

$$\int \frac{dt}{t^2-3t+2} = \int \frac{-1}{t-1}\,dt + \int \frac{1}{t-2}\,dt = -\log(t-1) + \log(t-2) =$$

$$= \boxed{-\log(e^x-1) + \log(e^x-2) + C}$$ - donde log es el logaritmo natural.

3A a) $XA - B = 2X \Rightarrow XA - 2IX = B \Rightarrow XA - X(2I) = B \Rightarrow$

$$\Rightarrow X(A-2I) = B \Rightarrow X(A-2I)(A-2I)^{-1} = B(A-2I)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X = B(A-2I)^{-1}}$$

Calculamos $A-2I$

$$A-2I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos $(A-2I)^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_2+F_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Calculamos X

$$\boxed{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & -2 \\ 11 & -7 & 3 \end{pmatrix}}$$

4A a) $r \Rightarrow x = 1 + 2z \Rightarrow y = 2 + z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

$s \Rightarrow 3y - z = 1 - a \Rightarrow z = a - 1 + 3y \Rightarrow x + y + a - 1 + 3y = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -a + 2 - 4y \Rightarrow \quad s \equiv \begin{cases} x = -a + 2 - 4\mu \\ y = \mu \\ z = a - 1 + 3\mu \end{cases}$

$\begin{cases} 1 + 2\lambda = -a + 2 - 4\mu \\ 2 + \lambda = \mu \\ \lambda = a - 1 + 3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda + 4\mu = 1 - a \\ \lambda - \mu = -2 \\ \lambda - 3\mu = a - 1 \end{cases}$

$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 1-a \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & a-1 \end{array}\right)$

$\det(A|B) = -2(a-1) - 3(1-a) - 8 + 1 - a - 12 - 4(a-1) =$

$= -2a + 2 - 3 + 3a - 8 + 1 - a - 12 - 4a + 4 =$

$= -4a - 16 = 0 \Rightarrow a = -4$

$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

Así, si $a = -4 \Rightarrow$ rango $A = 2 =$ rango $(A|B) =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ S.C.D. $\Rightarrow$ r y s se cortan en un punto

si $a \neq -4 \Rightarrow$ rango $A = 2 < 3 =$ rango $(A|B) \Rightarrow$ S.I $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ r y s se cruzan.

b) Si $a = -4 \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda + 4\mu = 5 \\ \lambda - \mu = -2 \\ \lambda - 3\mu = -5 \end{cases}$ $\xrightarrow{\cdot(-1)}$ $\begin{array}{r} -\lambda + \mu = 2 \\ \lambda - 3\mu = -5 \\ \hline -2\mu = -3 \end{array} \Rightarrow \mu = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = -2 + \mu = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

El punto de corte es: $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda = 1 - 1 = 0 \\ y = 2 + \lambda = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ z = \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\left(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)}$

Comprobación: sustituimos en s:

$x = -(-4) + 2 - 4\frac{3}{2} = 0$

$y = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \left(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$z = -4 - 1 + 3\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

PROPUESTA B

1B. a) Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto. **(1 punto)**

b) Halla el punto de la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ donde la recta tangente tiene pendiente mínima. **(1,5 puntos)**

2B. a) Esboza la región encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = 1/x$ y $g(x) = -2x + 3$. **(0,5 puntos)**

b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3B. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 5z & = & -1 \\ 2x & - & y & - & 3z & = & 1-m \\ x & - & 2y & + & 2z & = & m \end{array}\right.$$ **(1,5 puntos)**

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado. **(1 punto)**

4B. a) Dados los puntos $P(4, 2, 3)$ y $Q(2, 0, -5)$, da la ecuación implícita del plano π de modo que el punto simétrico de P respecto a π es Q. **(1,25 puntos)**

b) Calcula el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el plano determinado por los puntos P, Q y $R(\lambda, 1, 0)$ pase por el origen de coordenadas. **(1,25 puntos)**

Septiembre 2013

Propuesta B

1B a) La derivada de una función $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x=a$, es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

b) $f(x) = x^3+3x^2+1$

$f'(x) = 3x^2+6x$

$f'(x) = 0 \iff 3x^2+6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$

$f''(x) = 6x+6$

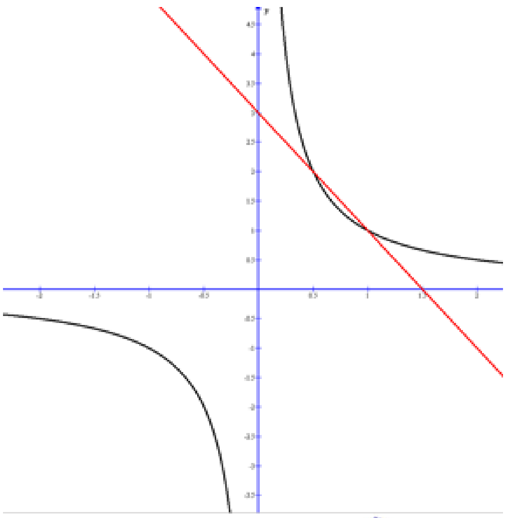
$f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow x=0$ es un mínimo (relativo) de f

$f''(x) = 0 \iff 6x+6 = 0 \Rightarrow x = -1$

$f'''(x) = 6$

$f'''(-1) = 6 > 0 \Rightarrow$ $\boxed{x=-1 \text{ es un mínimo (relativo) de la pendiente de la recta tangente.}}$

2B a)



$f(x) = \frac{1}{x}$

x	y
1	1
0,1	10
10	0,1
−1	−1
−0,1	−10
−10	−0,1

$g(x) = -2x+3$

x	y
0	3
1	1

b) Puntos de corte entre las funciones

$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{x} = -2x+3 \Rightarrow 1 = -2x^2+3x \Rightarrow 0 = -2x^2+3x-1$

$\Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$

Área

$$A = \int_{1/2}^{1} (g(x)-f(x))\,dx = \int_{1/2}^{1} \left(-2x+3-\frac{1}{x}\right)dx = -2\frac{x^2}{2}+3x-\log x \Big]_{1/2}^{1} =$$

$$= -1^2+3\cdot 1 - \log 1 - \left(-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 3\cdot\tfrac{1}{2} - \log\tfrac{1}{2}\right) = \boxed{\left(\tfrac{3}{4} + \log\tfrac{1}{2}\right) u^2}$$

$$= \frac{3}{4} + \log 1 - \log 2 = \boxed{\left(\frac{3}{4} - \log 2\right) u^2}$$

3B $\begin{cases} x+y-5z=-1 \\ 2x-y-3z=1-m \\ x-2y+2z=m \end{cases}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 1-m \\ 1 & -2 & 2 & m \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 3-m \\ 0 & -3 & 7 & m+1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 3-m \\ 0 & 0 & 0 & 2m-2 \end{array}\right) [1]$$

De [1]: $2m-2=0 \Rightarrow m=1$

Discusión: Si $m \neq 1 \Rightarrow$ rango $A = 2 \neq$ rango $(A|B) = 3 \Rightarrow$ S.I.
Si $m = 1 \Rightarrow$ rango $A = 2 =$ rango $(A|B) < 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.I.

b) $m=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} [1] \\ [2] \\ \end{array}$$

Llamamos $z=\lambda$ y sustituimos en [2]: $-3y+7\lambda = 2 \Rightarrow y = \dfrac{2-7\lambda}{-3} = \dfrac{-2+7\lambda}{3}$

Sustituimos en [1]: $x+y-5z=-1$

$$x = -1-y+5z = -1 - \frac{-2+7\lambda}{3} + 5\lambda = \frac{8\lambda-1}{3}$$

Soluciones: $\boxed{(x,y,z) = \left(\dfrac{8\lambda-1}{3}, \dfrac{7\lambda-2}{3}, \lambda\right) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}}$

4A a) $\overrightarrow{PQ}$ es el vector normal del plano π, que es perpendicular a $\overrightarrow{SG}$, donde S es el punto medio de $\overline{PQ}$ (y pertenece al plano buscado) y G es un pto genérico del plano.

$$S \begin{cases} x_S = \dfrac{4+2}{2} = 3 \\ y_S = \dfrac{2+0}{2} = 1 \\ z_S = \dfrac{3+(-5)}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_\pi = \overrightarrow{PQ} = (2,0,-5)-(4,2,3) = (-2,-2,-8) \\ \overrightarrow{SG} = (x,y,z)-(3,1,-1) = (x-3, y-1, z+1) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec{n}_{\pi} \cdot \overrightarrow{SG} = 0 \Rightarrow (-2,-2,-8)\cdot(x-3, y-1, z+1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2(x-3) - 2(y-1) - 8(z+1) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x + y + 4z = 0}$

b) $\pi' \equiv \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (-2,-2,-8) \\ \overrightarrow{PR} = (\lambda, 1, 0) - (4,2,3) = (\lambda-4, -1, -3) \Rightarrow \\ \overrightarrow{PG} = (x,y,z) - (4,2,3) = (x-4, y-2, z-3) \end{cases}$

$\Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y-2 & z-3 \\ \lambda-4 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8(x-4) - 2(\lambda-4)(z-3) + 6(y-2) -$
$- 2(z-3) - 6(x-4) + 8(\lambda-4)(y-2) = 0 \equiv \pi'$

Imponemos que $(0,0,0) \in \pi'$ para calcular λ:

$8(0-4) - 2(\lambda-4)(0-3) + 6(0-2) - 2(0-3) - 6(0-4) + 8(\lambda-4)(0-2) =$

$= -32 + 6\lambda \cancel{-24} - 12 + 6 \cancel{+24} - 16\lambda + 64 = 0 \Rightarrow 26 - 10\lambda = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{26}{10} = \frac{13}{5}}$