Reserva 1 de 2013

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el Teorema de Rolle. **(1 punto)**

b) Razona que existe al menos un punto en el intervalo $(1,2)$ donde la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$ tiene pendiente nula. **(1,5 puntos)**

2A. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que el área de la región comprendida entre las gráficas de las parábolas $f(x) = -x^2 + a^2$ y $g(x) = -4x^2 + 4a^2$ sea 32 unidades de superficie. **(2,5 puntos)**

3A. a) Despeja X en la ecuación matricial $A \cdot X = I_3 - 2B \cdot X$, donde I_3 es la matriz identidad de orden 3 y A, B y X son matrices cuadradas de orden 3. **(1,25 puntos)**

b) Calcula X, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ **(1,25 puntos)**

4A. Dados los planos $\pi \equiv ax + 2y + z = 4$, $a \in \mathbb{R}$, y $\pi' \equiv 2x - 4y - 2z = b$, $b \in \mathbb{R}$:

a) Razona para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ son π y π' coincidentes. **(1 punto)**

b) Razona para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ son π y π' paralelos no coincidentes. **(0,75 puntos)**

a) Razona para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ son π y π' perpendiculares. **(0,75 puntos)**

(sigue a la vuelta)

Reserva 1 - 2013

Propuesta A

1A a) Teorema de Rolle

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $f(a)=f(b)$, entonces $\exists\, c \in (a,b)$ t.q. $f'(c)=0$.

b) La función $f(x)=x^5+3x^4-5x^3-15x^2+4x+12$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$ (por ser una función polinómica), luego en particular, es continua en $[1,2]$ y derivable en $(1,2)$. Además

$$f(1)=1^5+3\cdot 1^4-5\cdot 1^3-15\cdot 1^2+4\cdot 1+12=0=$$
$$=2^5+3\cdot 2^4-5\cdot 2^3-15\cdot 2^2+4\cdot 2+12=f(2)$$

Aplicando el teorema de Rolle, $\exists\, c\in(1,2)$ t.q. $f'(c)=0$, esto es, en c la pendiente de la recta tangente es nula.

2A Puntos de corte entre las funciones

$$-x^2+a^2=-4x^2+4a^2 \Rightarrow -3x^2+3a^2=0 \Rightarrow x=a^2 \Rightarrow x=\pm a$$

Como $0\in(-a,a)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=a^2 \\ g(0)=4a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow g(x)>f(x)$$

Área (hay que tener en cuenta que $a>0$)

$$32=\int_0^a [g(x)-f(x)]\,dx=\int_0^a [-4x^2+4a^2-(-x^2+a^2)]\,dx=$$
$$=\int_0^a (-3x^2+3a^2)\,dx=-3\frac{x^3}{3}+3a^2x\Big]_0^a=-a^3+3a^3=2a^3=32 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^3=16 \Rightarrow \boxed{a=\sqrt[3]{16}=2\sqrt[3]{2}}$$

3A a) $AX=I-2BX \Rightarrow AX+2BX=I \Rightarrow (A+2B)X=I \Rightarrow$

$$\Rightarrow (A+2B)^{-1}(A+2B)X=(A+2B)^{-1}I \Rightarrow \boxed{X=(A+2B)^{-1}I=(A+2B)^{-1}}$$

b) Cálculo de $A+2B$

$$A+2B=\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2&0\\2&0&2\\2&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\2&0&3\end{pmatrix}$$

Cálculo de $(A+2B)^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{4F_2+F_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_2+F_1}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}}$$

4A a) Los vectores normales de ambos planos tienen que ser iguales o proporcionales, y además tienen que tener puntos en común.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\pi = (a, 2, 1) \\ \vec{n}_{\pi'} = (2, -4, -2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{1}{-2} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{-2} \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

$$P_\pi(1,2,z) \in \pi \Rightarrow z:\ -1+2\cdot 2+z-4=0 \Rightarrow z=1 \Rightarrow P_\pi(1,2,1)$$

El pto $P_\pi \in \pi' \Rightarrow 2\cdot 1 - 4\cdot 2 - 2\cdot 1 = b \Rightarrow \boxed{b=-8}$

b) En este caso, los vectores normales tienen que ser iguales o proporcionales y no tener ningún punto en común.

De otra forma: rango $A = 1$ y rango $(A|B) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \quad y \quad (A|B) = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & -2 & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4a-4 \Rightarrow \boxed{a=-1} \Rightarrow \text{rango } A = 1 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & b \end{vmatrix} = b+8 \Rightarrow b=-8$$

$$\boxed{\text{Si } a=-1 \text{ y } b \neq -8 \Rightarrow \pi \parallel \pi'}$$

c) $\pi \perp \pi' \Leftrightarrow \vec{n}_\pi \perp \vec{n}_{\pi'} \Leftrightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_{\pi'} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,2,1)\cdot(2,-4,-2) = 0 \Rightarrow 2a - 8 - 2 = 0 \Rightarrow a = 5$

$\boxed{\text{Si } a=5 \text{ y } b \in \mathbb{R}, \text{ se tiene que } \pi \perp \pi'.}$

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. a) Calcula para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ se verifica la igualdad

$$\lim_{x \to 0} (\cos(ax))^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2} \qquad \textbf{(1,25 puntos)}$$

b) Calcula el límite

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) \qquad \textbf{(1,25 puntos)}$$

2B. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{2\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx, \qquad \int (x^2 + 2x) \ln x\, dx \qquad \textbf{(1,25 puntos por integral)}$$

3B. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ -4x & - & 2y & + & mz & = & 0 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \qquad m \in \mathbb{R}$$

a) ¿Existe algún valor del parámetro m para el que el sistema sea incompatible? **(0,5 puntos)**

b) Estudia para qué valor del parámetro m el sistema tiene alguna solución distinta de la trivial $x = y = z = 0$. **(1 punto)**

c) Resuelve el sistema para todos los valores de $m \in \mathbb{R}$. **(1 punto)**

4B. Dados el punto $P(1, 0, 1)$ y la recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{array} \right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por el punto P. **(1,25 puntos)**

b) Calcula el punto simétrico Q de P respecto a r. **(1,25 puntos)**

Reserva 1 - 2013

Propuesta B

1B a) $\lim_{x\to 0} [\cos(ax)]^{1/x^2} = e^{-2}$

$$\| $$

$$[1^\infty] = e^{\alpha} \text{ donde } \alpha = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\cos(ax)-1\right) = [\infty \cdot 0] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(ax)-1}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-a\,\text{sen}(ax)}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-a^2\cos(ax)}{2} = \frac{-a^2}{2}$$

L'Hôpital L'Hôpital

Por tanto, $e^{-a^2/2} = e^{-2} \Rightarrow -\frac{a^2}{2} = -2 \Rightarrow -a^2 = -4 \Rightarrow \boxed{a = \pm 2}$

b) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) = \infty \cdot (\infty - \infty) =$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}\left(x+1-(x-1)\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \boxed{1}$$

2B a) $\int \frac{2\cos x}{1+\text{sen}^2 x}\,dx = \begin{bmatrix} t = \text{sen}\, x \\ dt = \cos x\,dx \end{bmatrix} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2\,\text{arctg}(t) =$

$$= \boxed{2\,\text{arctg}(\text{sen}\, x) + C}$$

b) $\int (x^2+2x)\ln x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln x \to du = \frac{1}{x}dx \\ dv = (x^2+2x)\,dx \to v = \frac{x^3}{3}+x^2 \end{bmatrix} = \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\ln x -$

$$- \int \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\frac{1}{x}\,dx = \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\ln x - \int\left(\frac{x^2}{3}+x\right)dx =$$

$$\boxed{= \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} + C}$$

3B $\begin{cases} x+y-z=0 \\ -4x-2y+mz=0 \\ 3x-2y+mz=0 \end{cases}$

a) Es un sistema homogéneo, luego $\boxed{\nexists\, m\in\mathbb{R}}$ t.q. el sistema sea incompatible.

b) Si no hay solución trivial, el sistema tiene que ser compatible indeterminado, luego rango A = rango $(A|B) \leq 2$, ya que el sistema tiene 3 incógnitas.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & m \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & m-4 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & m-4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 10+2m-8=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{m=-1}$

Si $m=-1 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow$ rango A = rango $(A|B) = 2 < 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

c) $\boxed{m=-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-3F_1+F_2]{4F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & +2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De la segunda ecuación: $\left.\begin{array}{r} 2y-5z=0 \\ z=\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{5}{2}\lambda$

Sustituimos en la 1ª ecuación:

$$x+y-z=0 \Rightarrow x=-y+z=-\frac{5}{2}\lambda+\lambda=\frac{-3}{2}\lambda$$

$\boxed{\text{Solución: } (x,y,z)=\left(-\frac{3}{2}\lambda, \frac{5}{2}\lambda, \lambda\right), \lambda\in\mathbb{R}}$

4B $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}$

a) $s \equiv \begin{cases} \text{Punto: } P(1,0,1) \\ \text{Vector director: } \overrightarrow{PR} \text{ donde } R \text{ es un punto genérico de } r \end{cases}$

Se tiene que $\overrightarrow{PR} \perp \vec{u}_r=(1,1,1)$ (vector director de r)

$$\overrightarrow{PR}=(\lambda, 1+\lambda, 2+\lambda)-(1,0,1)=(\lambda-1, \lambda+1, \lambda+1)$$

$\vec{u}_r \cdot \overrightarrow{PR} = 0 \Rightarrow (2,1,1)\cdot(\lambda-1, \lambda+1, \lambda+1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(\lambda-1) + \lambda + 1 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow R \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow R(0,1,2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{PR} = (0,1,2) - (1,0,1) = (-1,1,1)$

$$\boxed{s \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases} \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R}}$$

b) El punto R hallado en el apartado anterior, es el punto medio entre P y Q.

$$\left. \begin{array}{l} 0 = \dfrac{1 + x_Q}{2} \Rightarrow x_Q = -1 \\ 1 = \dfrac{0 + y_Q}{2} \Rightarrow y_Q = 2 \\ 2 = \dfrac{1 + z_Q}{2} \Rightarrow z_Q = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{Q(-1,2,3)}$$