UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Si la media aritmética de dos números reales positivos es 24, calcula el valor de dichos números para que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo. **(2,5 puntos)**

2A. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \left(\frac{2\ln x}{x} + \ln x \right) \, dx, \qquad \int 3\sqrt{2x+1}\, dx$$

(1,25 puntos por integral)

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & 2y & - & z & = & m \\ 3x & & & - & 2z & = & 11 \\ & & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & y & - & 4z & = & m \end{array} \right.$$

(1,5 puntos)

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible determinado. **(1 punto)**

4A. Dado el plano $\pi \equiv x - z = 0$ y las rectas

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = -1 - \lambda \end{array} \right. \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y = 2 \\ 4y + 2z = 6 \end{array} \right.$$

a) Halla el ángulo que forman π y r. Razona cuántos planos hay perpendiculares a π que contengan la recta r. **(1,25 puntos)**

b) Halla la posición relativa de π y s. Razona cuántos planos hay perpendiculares a π que contengan la recta s. **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

Reserva 2 - 2013

Propuesta A

1A) Sean x e y los números que buscamos.

$$\frac{x+y}{2}=24 \longrightarrow y=48-x$$

$$P=xy^2$$

$$p(x)=x(48-x)^2$$

$$p'(x)=(48-x)^2+x\cdot 2(48-x)(-1)=3x^2-192x+2304$$

$$p'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-192x+2304=0 \Rightarrow x=\begin{cases}48\\16\end{cases}$$

$$p''(x)=6x-192$$

$$p''(48)=6\cdot 48-192=96>0$$

$$p''(16)=6\cdot 16-192=-96<0 \Rightarrow x=16 \text{ es un máx. (relativo)}$$

Por tanto, $\boxed{\text{los nºs buscados son } 16 \text{ y } 48-16=32.}$

2A) a) $$\int\left(\frac{2\ln x}{x}+\ln x\right)dx=2\int\frac{\ln x}{x}dx+\int \ln x\,dx=$$

$$=\underbrace{2\int \ln x\cdot\frac{1}{x}dx}_{\text{inmediata}}+\int \ln x\,dx=\left[\begin{array}{l}\text{Para la 2ª integral:}\\ u=\ln x\to du=\frac{dx}{x}\\ dv=dx\to v=x\end{array}\right]=$$

$$=2\frac{\ln^2 x}{2}+x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=\boxed{\ln^2 x+x\ln x-x+C}$$

b) $$\int 3\sqrt{2x+1}\,dx=\left[\begin{array}{l}t^2=2x+1\\ dx=t\,dt\end{array}\right]=\int 3t\cdot t\,dt=3\frac{t^3}{3}=\boxed{\sqrt{(2x+1)^3}+C}$$

3A) a) $$\begin{cases}2y-z=m\\3x-2z=11\\y+z=6\\2x+y-4z=m\end{cases}$$

$$|(A|B)|=\begin{vmatrix}0&2&-1&m\\3&0&-2&11\\0&1&1&6\\2&1&-4&m\end{vmatrix}\overset{-2F_3+F_1}{=}\begin{vmatrix}0&0&-3&m-12\\3&0&-2&11\\0&1&1&6\\2&1&-4&m\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}0&-3&m-12\\3&-2&11\\2&-5&m-6\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)\left[-15(m-12)-66+4(m-12)+9(m-6)\right]=$$

$$=(-1)\cdot\left[-15m+180-66+4m-48+9m-54\right]=2m-12=0 \Rightarrow m=6$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3-6=-9 \neq 0$$

Discusión:

Si $m=6 \Rightarrow$ rango $A=$ rango $(A|B)=3=$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D.

Si $m\neq 6 \Rightarrow$ rango $A=3<4=$ rango $(A|B) \Rightarrow$ S.I.

b) $m=6$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_2+3F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & 22 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [3]: $11z=22 \Rightarrow z=2$

Sustituimos en [2]: $y+z=6 \Rightarrow y=4$

Sustituimos en [1]: $3x-2z=11 \Rightarrow x=\dfrac{11+2z}{3}=\dfrac{11+4}{3}=5$

$\boxed{\text{Solución: } (x,y,z)=(5,4,2)}$

4A a) $\left.\begin{array}{l}\vec{u}_\pi=(1,0,-1)\\ \vec{u}_r=(1,0,-1)\end{array}\right\}$ $\text{sen}\,\alpha=\dfrac{|\vec{u}_\pi\cdot\vec{u}_r|}{|\vec{u}_\pi|\,|\vec{u}_r|}=\dfrac{|(1,0,-1)\cdot(1,0,-1)|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}\,\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=1$

$\Rightarrow \boxed{\alpha=\text{arcsen } 1=90^\circ} \Rightarrow \pi$ y r son perpendiculares.

Hay infinitos planos que son perpendiculares al plano π y que contengan a la recta r: el haz de planos que genera dicha recta.

Ec. de la recta r:

$$r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+1}{1} \Rightarrow \begin{cases} y-2=0 \\ x-1=z-1 \Rightarrow x-z=0 \end{cases} \begin{cases} y-2=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

Haz de planos generados por r: $\boxed{x-z+\lambda(y-2)=0}$

b) $\left.\begin{cases} x+y=2 \\ 4x+2z=6 \end{cases}\right\} \equiv s$ $\quad x-z=0 \equiv \pi$ $\qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2+4 = 6 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ rango A = rango $(A|B) = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{la recta y el plano se cortan en un punto.}}$

El plano o los planos perpendiculares a π están generados por el vector normal al plano, el vector director de la recta s y el vector $\overrightarrow{PG}$, donde P es el punto de corte del plano y la recta y, G es un punto genérico del plano.

$$x = 2-y \Rightarrow 4y+2z = 6 \Rightarrow 2y+z = 3 \Rightarrow z = 3-2y \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3-2\lambda \end{cases}$$

Punto P: $2-\lambda-(3-2\lambda) = 0 \Rightarrow 2-\lambda-3+2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow P \begin{cases} x = 2-1 = 1 \\ y = 1 \\ z = 3-2\cdot 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow P(1,1,1)$$

$$\left.\begin{cases} \vec{n}_\pi = (1,0,-1) \\ \vec{u}_r = (-1,1,-2) \\ \overrightarrow{PG} = (x,y,z)-(1,1,1) = (x-1,y-1,z-1) \end{cases}\right\} \pi' \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ x-1 & y-1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi' \equiv x+3y+z-5=0}$$

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. a) Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange. **(1,25 puntos)**

b) Calcula un punto del intervalo $[-2, 2]$ en el que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3x + 2$ sea paralela a la recta que pasa por los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 12)$. **(1,25 puntos)**

2B. El área del recinto encerrado entre la gráfica de la parábola $f(x) = a(x^2 - 2x)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, y el eje de abscisas, es de 12 unidades de superficie. Calcula el valor de a. **(2,5 puntos)**

3B. Évariste Galois, Niels Abel y Srinivasa Ramanujan fueron tres genios matemáticos que antes de sus prematuras muertes dejaron desarrollada una importante obra matemática. Calcula las edades que tenían cuando fallecieron, sabiendo que su suma es 78, que su media aritmética coincide con la edad de Abel, y que cuatro veces la edad de Ramanujan más dos veces la de Abel es nueve veces la edad de Galois. **(1,25 puntos por plantear un sistema de ecuaciones lineales con los datos del problema y 1,25 puntos por calcular las edades)**

4B. a) Determina el valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para que la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = k - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

esté contenida en el plano $\pi \equiv x + 2y + z = 7$. **(1,25 puntos)**

b) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, obtén la ecuación implícita de un plano π' que corte perpendicularmente a π, de modo que la intersección de ambos planos sea r. **(1,25 puntos)**

Reserva 2 - 2013

Propuesta B

1B a) Teorema del valor medio o de Lagrange

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces $\exists c\in(a,b)$ t.q. $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

b) Como $f(x)=x^2+3x+2$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$, por ser una función polinómica, es continua en $[-2,2]$ y derivable en $(-2,2)$. Aplicando el teorema del valor medio de Lagrange $\exists c\in(-2,2)$ t.q. $f(2)-f(-2)=f'(c)[2-(-2)]$

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=2^2+3\cdot 2+2=12 \\ f(-2)=(-2)^2+3\cdot(-2)+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 12-0=f'(c)[2-(-2)] \Rightarrow f'(c)=\frac{12}{4}=3=m$$

$$f'(c)=2c+3=m=3 \Rightarrow 2c+3=3 \Rightarrow \boxed{c=0}$$

2B $f(x)=a(x^2-2x)$, $a>0$

Puntos de corte con OX: $y=0 \Rightarrow a(x^2-2x)=0 \Rightarrow x=\begin{cases}0\\2\end{cases}$

$$1\in(0,2) \Rightarrow f(1)=a(1^2-2\cdot 1)=-a<0 \Rightarrow f(x)<0$$

Área:

$$12=\left|\int_0^2 a(x^2-2x)\,dx\right| \Rightarrow 12=-\int_0^2 a(x^2-2x)\,dx=$$

$$=-\left(a\frac{x^3}{3}-a\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}\Big]_0^2\right)=-\left(a\frac{8}{3}-4a\right)=-\frac{8a}{3}+4a=12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4a}{3}=12 \Rightarrow 4a=36 \Rightarrow \boxed{a=\frac{36}{4}=9}$$

3B Sean $\begin{cases} G = \text{edad a la que murió Galois} \\ A = \text{" " " " " Abel} \\ R = \text{" " " " " Ramanujan} \end{cases}$

$$\begin{cases} G+A+R=78 \\ \dfrac{G+A+R}{3}=A \\ 4R+2A=9G \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} G+A+R=78 \\ G-2A+R=0 \\ 9G-2A-4R=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 78 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 9 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-9F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 78 \\ 0 & -3 & 0 & -78 \\ 0 & -11 & -13 & -702 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [2]: $-3A = -78 \Rightarrow A = \frac{-78}{-3} = 26$

Sustituimos en [3]: $-11A - 13R = -702$

$$R = \frac{-702 + 11 \cdot 26}{-13} = 32$$

Sustituimos en [1]:

$$G + A + R = 78$$

$$G = 78 - 26 - 32 = 20$$

$\boxed{\text{Solución: Galois murió con 20 años, Abel con 26 y Ramanujan con 32.}}$

(4B) a) Si r está contenida en π $(r \subset \pi)$, entonces $\vec{u}_r \perp \vec{n}_\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\pi = (1,2,1) \\ \vec{u}_r = (1,-1,1) \end{array}\right\} \vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi = (1,-1,1)\cdot(1,2,1) = 1 - 2 + 1 = 0 \Rightarrow r \subset \pi.$$

Además, $R(1,k,0) \in r \subset \pi \Rightarrow R \in \pi \Rightarrow 1 + 2k + 0 = 7 \Rightarrow \boxed{k=3}$

b) El plano π', es aquel que perteneciendo al haz de planos generados por la recta, tenga vector normal perpendicular al del plano π.

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right., \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = z \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 1 = z \\ y - 3 = z \end{array}\right. \Rightarrow r \equiv \left\{\begin{array}{l} x - z - 1 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{array}\right.$$

Haz de rectas: $x - z - 1 + \mu(y + z - 3) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \pi_{H_r} \equiv x + \mu y + (\mu - 1) z - 1 - 3\mu = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{n}_\pi = (1,2,1) \\ \vec{n}_{\pi_{H_r}} = (1,\mu,\mu-1) \end{array}\right. \Rightarrow \vec{n}_\pi \perp \vec{n}_{\pi_{H_r}} \Rightarrow (1,2,1)\cdot(1,\mu,\mu-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow x + 0 \cdot y + (0-1) z - 1 - 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv x - z - 1 = 0}$$