

Junio 2012



Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Dada la función

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

calcula los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ sabiendo que:

- la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$ tiene pendiente -3
- $f(x)$ tiene un punto de inflexión de coordenadas $(1, 2)$.

(2,5 puntos)

- 2A.** a) Esboza la región encerrada entre la parábola $f(x) = x^2 - 1$ y la recta $g(x) = 5 - x$. **(0,5 puntos)**
b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ mx + (m+1)y + (m-1)z = m-2 \\ 3x + (m+3)y + 4z = m-2 \end{cases} \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

- b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible determinado. **(1 punto)**

4A. a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $\pi \equiv x - y + 3z = -3$ con los ejes de coordenadas. **(1,25 puntos)**

b) Si llamamos A , B y C a los vértices del triángulo del apartado anterior, encuentra el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el tetraedro de vértices A , B , C y $D(-\lambda^2, 2 + \lambda, -3)$ tenga volumen mínimo. **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

Junio 2012

Propuesta A

1A) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

• $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(-1) = 3 - 2a + b = -3 \Rightarrow \boxed{-2a + b = -6}$

• $f''(x) = 6x + 2a$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{2a}{6} = -\frac{1}{3}a = 1 \Rightarrow \boxed{a = -3}$

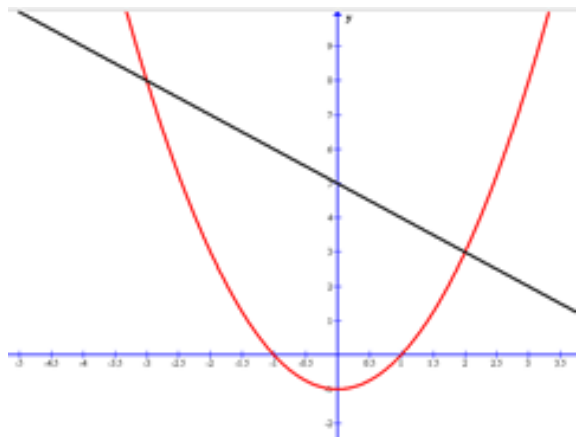
• $\begin{cases} -2a + b = -6 \\ a = -3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{b = -12}$

• Como $(1, 2)$ pertenece a la gráfica de f , $f(1) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1^3 - 3 \cdot 1^2 + (-12) \cdot 1 + c = 2 \Rightarrow \boxed{c = 16}$

• Así, $\boxed{f(x) = x^3 - 3x^2 - 12x + 16}$

2A) a)



$f(x) = x^2 - 1$

• Vértice:

$x_v = -\frac{b}{2a} = 0$

$y_v = -1$

$V(0, -1)$

• Puntos de corte con OX

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$\Rightarrow (-1, 0) \text{ y } (1, 0)$

$g(x) = 5 - x$

x	y
0	5
1	4

b) Puntos de corte entre las funciones

$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 1 = 5 - x \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$

Área

$\boxed{A} = \int_{-3}^2 [g(x) - f(x)] dx = \int_{-3}^2 (5 - x - x^2 + 1) dx = \int_{-3}^2 (6 - x - x^2) dx =$

$= \left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^2 = 6 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} - \left(6 \cdot (-3) - \frac{(-3)^2}{2} - \frac{(-3)^3}{3} \right) =$

$= \frac{22}{3} - \left(-\frac{27}{2} \right) = \boxed{\frac{125}{6} \text{ u}^2}$

$$3A \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ mx+(m+1)y+(m-1)z=m-2 \\ 3x+(m+3)y+4z=m-2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ m & m+1 & m-1 & m-2 \\ 3 & m+3 & 4 & m-2 \end{array} \right) & \xrightarrow{\substack{-F_1+F_2 \\ -mF_1+F_3 \\ -3F_1+F_4}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & m-2 \\ 0 & m & +1 & m-2 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\substack{-F_2+F_3 \\ -mF_2+F_4}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & m-2 \\ 0 & 0 & 1-2m & m-2 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{(1-2m)F_3+3F_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & m-2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}m^2+\frac{8}{3}m-\frac{8}{3} \end{array} \right) [4] \end{aligned}$$

De [4]: $-2m^2+8m-8=0 \Rightarrow m=2$

Discusión:

Si $m \neq 2 \Rightarrow \text{rango}(A)=3 < 4 = \text{rango}(A|B) \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$

Si $m=2 \Rightarrow \text{rango}(A)=3 = \text{rango}(A|B) = n^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{S.C.D.}$

b) $m=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ Sistema homogéneo} \Rightarrow \boxed{(x,y,z) = (0,0,0) \text{ Solución trivial}}$$

4A a) Puntos de corte con los ejes:

$$OX \equiv \begin{cases} x=\mu \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \mu-0+3 \cdot 0 = -3 \Rightarrow \mu = -3 \Rightarrow A \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow A(-3,0,0)$$

$$OY \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=\alpha \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow 0-\alpha+3 \cdot 0 = -3 \Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow B \begin{cases} x=0 \\ y=3 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow B(0,3,0)$$

$$OZ \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow 0-0+3\lambda = -3 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow C \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}$$

Area

$$A = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$\vec{AB} = (0, 3, 0) - (-3, 0, 0) = (3, 3, 0)$$

$$\vec{AC} = (0, 0, -1) - (-3, 0, 0) = (-3, 0, -1)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 9\vec{k} + 3\vec{j} \Rightarrow \vec{AB} \times \vec{AC} = (-3, 9, 3)$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + 9^2 + 3^2} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}$$

$$A = \frac{1}{2} 3\sqrt{11} = \boxed{\frac{3\sqrt{11}}{2} u^2}$$

$$b) V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} |\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|$$

$$\vec{AD} = (-\beta^2, 2+\beta, 3) - (-3, 0, 0) = (3-\beta^2, 2+\beta, 3)$$

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \\ 3-\beta^2 & 2+\beta & 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \left| -3(3-\beta^2) + 3(2+\beta) + 27 \right| =$$

$$= \frac{1}{6} \left| -9 + 3\beta^2 + 6 + 3\beta + 27 \right| = \frac{1}{6} \left| 3\beta^2 + 3\beta + 24 \right|$$

$3\beta^2 + 3\beta + 24 = 0$ no tiene soluciones reales
y para $\beta = 0 \Rightarrow 24 > 0$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{6} (3\beta^2 + 3\beta + 24)$$

Hay que minimizar $f(\beta) = \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{1}{2}\beta + 4$

$$f'(\beta) = \frac{1}{2} 2\beta + \frac{1}{2}$$

$$f'(\beta) = 0 \Rightarrow \beta + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2}$$

$$f''(\beta) = 1$$

$$f''(-\frac{1}{2}) > 0 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2} \text{ es un m\u00ednimo (relativo)}$$

$$\boxed{\text{El volumen del tetraedro es m\u00ednimo para } \beta = -\frac{1}{2}}$$

(donde $\beta = \lambda$)



PROPUESTA B

1B. La concentración (en %) de nitrógeno de un compuesto viene dada, en función del tiempo $t \in [0, +\infty)$ medido en segundos, por la función

$$N(t) = \frac{60}{1 + 2e^{-t}}$$

a) Comprueba que la concentración de nitrógeno crece con el tiempo. ¿Para qué $t \in [0, +\infty)$ la concentración de nitrógeno es mínima y cuál es esta concentración? **(1,25 puntos)**

b) ¿A qué valor tiende la concentración de nitrógeno cuando el tiempo tiende a infinito? **(1,25 puntos)**

2B. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{1}{4 + 9x^2} dx \qquad \int \left(\tan x + \frac{1}{\tan x} \right) dx \qquad \textbf{(1,25 puntos por integral)}$$

3B. a) Sean A y B matrices cuadradas de orden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, tales que B es la inversa de A :

- Si $|A| = 3$, razona cuánto vale $|B|$.
- ¿Cuál es el rango de B ?

(0,75 puntos)

b) Calcula el determinante de la matriz cuadrada X de orden 3 que verifica

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1,75 puntos)}$$

4B. Dados el plano $\pi \equiv 2x - z = 6$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} y + z = 0 \\ x - y + az = 4 \end{cases}$$

a) Encuentra el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que π y r sean paralelos. **(1,25 puntos)**

b) Para el valor de a del apartado anterior, da la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π . **(1,25 puntos)**

Propuesta B

1B a) $N(t) = \frac{60}{1+2e^{-t}} \quad t \in [0, +\infty)$

$$N'(t) = \frac{-60(-2e^{-t})}{(1+2e^{-t})^2} = \frac{120e^{-t}}{(1+2e^{-t})^2}$$

$$N'(t) = 0 \Rightarrow 120e^{-t} = 0 \Rightarrow e^{-t} = 0 \quad \text{y } \nexists t \in [0, +\infty) \text{ t.q. } e^{-t} = 0$$

Así, la concentración es mínima para $t=0$ (ya que $N'(t) > 0 \quad \forall t \in [0, +\infty)$) y dicha concentración es del $N(0) = \frac{60}{1+2} = 20\%$

b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{60}{1+2e^{-t}} = 60$ ya que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$

[La concentración de nitrógeno tiende al 60%.]

2B a) $\int \frac{1}{4+9x^2} dx = \int \frac{1}{4\left(1+\frac{9}{4}x^2\right)} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2} dx =$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \int \frac{\frac{3}{2}}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2} dx = \frac{1}{6} \arctg\left(\frac{3}{2}x\right) + C$$

b) $\int \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx = -\log(\cos x) + \log(\operatorname{sen} x) + C$

donde $\log$ es el logaritmo natural.

3B a) Como $B = A^{-1}$ se tiene que $AB = I \Rightarrow |AB| = |I| \Rightarrow$

$$\Rightarrow |A| |B| = 1 \Rightarrow |B| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{3}$$

Por otra parte, como $|A| = 3 \neq 0$ y $|B| \neq 0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(B) = n \in \mathbb{N}}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Calculamos la inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2:10} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/10 & 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-7F_2+F_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/10 & 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 21/10 & 0 & -7/10 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{10}{21}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/10 & 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2/3 & 10/21 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{3}{10}F_3+F_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 10/21 \end{array} \right) \xrightarrow{-8F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 8/3 & -80/21 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 10/21 \end{array} \right) \xrightarrow{2F_2+F_1}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 8/3 & -74/21 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 10/21 \end{array} \right)$$

Cálculo de Σ

$$\boxed{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 8/3 & -74/21 \\ 0 & 0 & 1/7 \\ 0 & -1/3 & 10/21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -74/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10/3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{|\Sigma|} = \det \begin{pmatrix} 1 & 8 & -74/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10/3 \end{pmatrix} = \boxed{1}$$

4B) a) Para que $\pi \parallel r$, el vector normal de π y el vector director de r tienen que ser perpendiculares: $\vec{n}_\pi \perp \vec{u}_r \Leftrightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r = 0$

$$y = -z \Rightarrow x + z + az = 4 \Rightarrow x + z(1+a) = 4 \Rightarrow x = 4 - (1+a)z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 4 - (1+a)\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_r = (-1-a, -1, 1)$$

$$\begin{cases} \vec{n}_\pi = (2, 0, -1) \\ \vec{u}_r = (-1-a, -1, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r = -2 - 2a - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{3}{2}}$$

b) $\pi' \begin{cases} \vec{u}_r \\ \vec{n}_{\pi} \\ \vec{RG} \end{cases}$ donde $R \in \Gamma$ cualquiera y G un punto de π'

$$\vec{RG} = (x, y, z) - (4, 0, 0) = (x-4, y, z)$$

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y & z \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -y - 4z - 2(x-4) - 4y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2(x-4) - 5y - 4z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi' \equiv 2x + 5y + 4z - 8 = 0}$$