



Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el Teorema de Bolzano y el Teorema de Rolle. **(1 punto)**

b) Demuestra, usando el Teorema de Bolzano, que existen al menos tres raíces reales distintas de la ecuación

$$x^5 - 5x + 3 = 0 \quad \textbf{(1 punto)}$$

c) Demuestra, usando el Teorema de Rolle, que la ecuación anterior no puede tener más de tres raíces reales distintas. **(0,5 puntos)**

2A. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx \quad \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx \quad \textbf{(1,25 puntos por integral)}$$

3A. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5,$$

calcula el valor de los determinantes

$$\begin{vmatrix} b & b+a & 2c \\ e & e+d & 2f \\ h & h+g & 2i \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta.

(1,25 puntos por determinante)

4A. Dado el plano $\pi \equiv x + y + 2z = 7$ y el punto $P(1, 0, 0)$:

a) Calcula el punto Q de π que hace mínima la distancia a P . **(1,25 puntos)**

b) Calcula el punto simétrico P' de P respecto del plano π . **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

Propuesta A

1A.- a) Enuncia el Teorema de Bolzano y el Teorema de Rolle (**1 punto**)

b) Demuestra, usando el teorema de Bolzano, que existen, al menos, tres raíces reales distintas de la ecuación $f(x) = x^5 - 5x + 3 = 0$ (**1 punto**)

c) Demuestra, usando el teorema de Rolle, que la ecuación anterior no puede tener mas de tres raíces reales distintas (**0'5 puntos**)

a)

Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[\text{sign } f(a) \neq \text{sign } f(b)]$, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

Teorema de Rolle

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y que verifica que $f(a) = f(b)$; entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

b)

Sea $f(x) = x^5 - 5x + 3 = 0$, sabemos que esta función es continua en todo su dominio que es la recta real y el intervalo, entre otros, $[0, 1]$ toma valores, en los extremos de dicho intervalo:

$$f(0) = 0^5 - 5 \cdot 0 + 3 = 3 > 0 \text{ y } f(1) = 1^5 - 5 \cdot 1 + 3 = -1 < 0$$

con signo diferentes, $[\text{sign } f(0) \neq \text{sign } f(1)]$, por lo tanto existe, según el teorema de Bolzano, al menos, un punto $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$ que es una solución real de la función o lo que es lo mismo que

$$f(c) = c^5 - 5c + 3 = 0$$

En el intervalo $[1, 2]$ toma valores, en los extremos de dicho intervalo:

$$f(1) = 1^5 - 5 \cdot 1 + 3 = -1 < 0 \text{ y } f(2) = 2^5 - 5 \cdot 2 + 3 = 32 - 10 + 3 = 25 > 0$$

con signo diferentes, $[\text{sign } f(1) \neq \text{sign } f(2)]$, por lo tanto existe, según el teorema de Bolzano, al menos, un punto $h \in (1, 2)$ tal que $f(h) = 0$ que es una solución real de la función o lo que es lo mismo que

$$f(h) = h^5 - 5h + 3 = 0$$

En el intervalo $[0, -2]$ toma valores, en los extremos de dicho intervalo:

$$f(-2) = (-2)^5 - 5 \cdot (-2) + 3 = -32 + 10 + 3 = -19 < 0 \text{ y } f(0) = 0^5 - 5 \cdot 0 + 3 = 3 > 0$$

con signo diferentes, $[\text{sign } f(-2) \neq \text{sign } f(0)]$, por lo tanto existe, según el teorema de Bolzano, al menos, un punto $j \in (-2, 0)$ tal que $f(j) = 0$ que es una solución real de la función o lo que es lo mismo que

$$f(j) = j^5 - 5j + 3 = 0$$

c)

Comprobemos que la función $f(x) = x^5 - 5x + 3 = 0$ únicamente puede tener las raíces reales detectadas

Veamos ahora mediante el teorema de Rolle y trabajando por reducción al absurdo que estas raíces son única.

Supongamos que $f(x)$ tiene una cuarta raíz k , tales que $f(c) = f(k) = 0$, no perteneciendo k al intervalo $[-2, 1]$ en donde hemos buscado soluciones

Como $f(x)$ es una función exponencial y polinómica, es continua y derivable en toda la recta real, o sea en el intervalo $[c, k]$ y además toma el mismo valor en los extremos de dicho intervalo por lo que aplicando el teorema de Rolle, tenemos que existe, al menos, un punto $x_0 \in (c, k)$ tal que $f'(x_0) = 0$

Continuación del Problema 1A

La derivada de esta función es $f'(x) = 5x^4 - 5$; así, para determinar el punto x_0 tendremos que igualar su derivada a cero,

$$5x^4 - 5 = 0 \Rightarrow 5x^4 = 5 \Rightarrow x^4 = \frac{5}{5} \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \in [-2, 1] \\ x = -1 \in [-2, 1] \end{cases}$$

Esta ecuación no tiene una cuarta solución en el campo de los números reales, ya que, de haberla, debía de estar fuera del intervalo estudiado y los valores que anulan a la derivada (máximos o mínimos relativos) se encuentran en el intervalo en donde hemos detectado las tres raíces

2A.- Calcula las siguientes integrales $\int \sin^2 x \cos x \, dx$ $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$ **(1'25 puntos por integral)**

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \int t^2 \, dt = \frac{1}{3} t^3 = \frac{\sin^3 x}{3} + K$$

$$\sin x = t \Rightarrow \cos x \, dx = dt$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx = \int e^u \cdot 2 \, du = 2e^u = 2e^{\sqrt{x}} + K$$

$$\sqrt{x} = u \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = du \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \, du$$

3A.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calcular el valor de los determinantes

$$\begin{vmatrix} b & b+a & 2c \\ e & e+d & 2f \\ h & h+g & 2i \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta **(1'25 puntos por determinante)**

$$\begin{vmatrix} b & b+a & 2c \\ e & e+d & 2f \\ h & h+g & 2i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b & 2c \\ e & e & 2f \\ h & h & 2i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & 2c \\ e & d & 2f \\ h & g & 2i \end{vmatrix} \quad (I) = 0 + 2 \cdot \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} \quad (II) = 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad (III) = (-2) \cdot 5 = -10$$

(I) Si todos los elementos de una fila o columna de una matriz se descomponen en suma de dos sumandos, su determinante también se descompone en suma de los determinantes

(II) Si una matriz tiene dos filas o columnas iguales su determinante es igual a cero

(III) Si permutamos dos filas o columnas de una matriz su determinante cambia de signo

$$\begin{vmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad (IV) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & e & f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad (I) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + 0 \quad (II) = 5$$

(IV) Si una fila o una columna de una matriz se le suma o resta una combinación lineal de las otras filas o columnas, el determinante de la matriz resultante coincide con el del inicial

4A.- Dado el plano $\pi \equiv x + y + 2z = 7$ y el punto $P(1, 0, 0)$

a) Calcula el punto Q de π que hace mínima la distancia a P **(1'25 puntos)**

b) Calcula el punto simétrico P' de P respecto del plano π **(1'25 puntos)**

a) Hallaremos una recta r perpendicular al plano que pase por el punto P , recta determinada por dicho punto y por el vector director del plano que es el de la recta. El punto de intersección de r con el plano π es el punto Q buscado

$$\vec{v}_r = \vec{v}_\pi = (1, 1, 2) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \text{Intersección de } r \text{ con } \pi \Rightarrow 1 + \lambda + \lambda + 2 \cdot 2\lambda = 7 \Rightarrow 6\lambda = 6 \Rightarrow$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow Q \begin{cases} x = 1 + 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow Q(2, 1, 2)$$

b) El punto Q es el punto medio entre P y su simétrico P'

$$\begin{cases} 2 = \frac{1 + x_{P'}}{2} \Rightarrow 1 + x_{P'} = 4 \Rightarrow x_{P'} = 3 \\ 1 = \frac{0 + y_{P'}}{2} \Rightarrow y_{P'} = 2 \\ 2 = \frac{0 + z_{P'}}{2} \Rightarrow z_{P'} = 4 \end{cases} \Rightarrow P'(3, 2, 4)$$



PROPUESTA B

1B. Dada la función

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{2x + 6},$$

calcula los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ sabiendo que:

- $f(x)$ tiene una asíntota oblicua de pendiente 2
- $f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = 0$. **(2,5 puntos)**

2B. Calcula el área encerrada entre las gráficas de las funciones

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = 1 \quad \textbf{(2,5 puntos)}$$

3B. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ ax - 3z = a \\ 2x + ay - z = a \end{cases} \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo para el valor $a = 1$. **(1 punto)**

4B. Dado el punto $P(1, 0, 0)$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por P y corta perpendicularmente a r . **(1,25 puntos)**

b) Calcula la distancia de P a r . **(1,25 puntos)**

Propuesta B

1B.- Dada la función $f(x) = \frac{ax^2 + b}{2x + 6}$ calcula los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ sabiendo que:

- $f(x)$ tiene una asíntota oblicua de pendiente 2
- $f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = 0$ (2'5 puntos)

$$2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^2 + b}{2x + 6}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + b}{2x^2 + 6x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^2}{x^2} + \frac{b}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{6x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{x^2}}{2 + \frac{6}{x}} = \frac{a + \frac{b}{\infty}}{2 + \frac{6}{\infty}} = \frac{a + 0}{2 + 0} = \frac{a}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = 4$$

$$f'(x) = \frac{2ax(2x+6) - 2(ax^2 + b)}{(2x+6)^2} = \frac{4ax^2 + 12ax - 2ax^2 - 2b}{(2x+6)^2} = \frac{2ax^2 + 12ax - 2b}{(2x+6)^2} = 2 \cdot \frac{ax^2 + 6ax - b}{(2x+6)^2}$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \frac{a \cdot 0^2 + 6a \cdot 0 - b}{(2 \cdot 0 + 6)^2} = 0 \Rightarrow 2 \cdot \frac{0 + 0 - b}{(0 + 6)^2} = 0 \Rightarrow -\frac{2b}{36} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$f(x) = \frac{4x^2}{2x + 6}$$

2B.- Calcula el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = 1$ (2'5 puntos)

$$\text{Punto de corte entre funciones} \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 1 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3+1}{2} = 2 \\ x = \frac{3-1}{2} = 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$x = \frac{1}{2} \in (0, 1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 1 + 1 = \frac{1-6+16}{8} = \frac{11}{8} \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{11}{8} > 1$$

$$x = \frac{3}{2} \in (1, 2) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{2}\right) + 1 = \frac{27}{8} - \frac{27}{4} + 3 + 1 = \frac{27-54+32}{8} = \frac{5}{8} \\ g\left(\frac{3}{2}\right) = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{5}{8} < 1$$

$$A = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x + 1) dx - \int_0^1 dx + \int_1^2 dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x + 1) dx = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx$$

$$A = \frac{1}{4} \cdot [x^4]_0^1 - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^1 - \frac{1}{4} \cdot [x^4]_1^2 + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_1^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_1^2$$

$$A = \frac{1}{4} \cdot (1^4 - 0^4) - (1^3 - 0^3) + (1^2 - 0^2) - \frac{1}{4} \cdot (2^4 - 1^4) + (2^3 - 1^3) - (2^2 - 1^2) = \frac{1}{4} - 1 + 1 - \frac{15}{4} + 7 - 3 = \frac{1}{2} u^2$$

3B.- a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ ax - 3z = a \quad \text{(1'5 puntos)} \\ 2x + ay - z = a \end{cases}$$

b) Resuélvelo para el valor $a = 1$ (1 punto)

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & -3 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix} = -6 + 2a^2 + 3a + a = 2a^2 + 4a - 6 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow 2a^2 + 4a - 6 = 0 \Rightarrow 2(a^2 + 2a - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 \geq 0 \Rightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-2 + 4}{2} = 1 \\ a = \frac{-2 - 4}{2} = -3 \end{cases}$$

$\forall m \in \mathbb{R} - \{-3, 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Si $a = -3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = -2 \Rightarrow$$

$$z = -\frac{2}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número de incógnitas}$$

Sistema Compatible Indeterminado

b)

Si $a = 1 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

$$-y - 5z = 1 \Rightarrow y = -1 - 5z \Rightarrow x + (-1 - 5z) + 2z = 0 \Rightarrow x - 1 - 5z + 2z = 0 \Rightarrow x = 1 + 3z$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (1 + 3\lambda, -1 - 5\lambda, \lambda)$$

4.B.- Dado el punto $P(1, 0, 0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

a) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta s que pase por P y corta perpendicularmente a r **(1'25 puntos)**

b) Calcula la distancia de P a r **(1'25 punto)**

a) El producto escalar del vector director de la recta r y el formado por el punto P y por el punto genérico R de la misma recta r es nulo ya que son rectas perpendiculares. Con el dato hallado tendremos el vector director de la recta s buscada

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (2, 1, 0) \\ \vec{PR} = (2\lambda, 3 + \lambda, 0) - (1, 0, 0) = (2\lambda - 1, 3 + \lambda, 0) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{PR} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{PR} = 0 \Rightarrow$$

$$(2, 1, 0) \cdot (2\lambda - 1, 3 + \lambda, 0) = 0 \Rightarrow 4\lambda - 2 + 3 + \lambda = 0 \Rightarrow 1 + 5\lambda = 0 \Rightarrow 5\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_s = \left[2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) - 1, 3 + \left(-\frac{1}{5}\right), 0 \right] = \left(-\frac{2}{5} - 1, 3 - \frac{1}{5}, 0\right) = \left(-\frac{7}{5}, \frac{14}{5}, 0\right) \equiv (-7, 14, 0) \equiv (1, -2, 0) \Rightarrow$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = -2\mu \\ z = 0 \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

b) La distancia pedida es la de P al punto de corte S de las rectas r y s que se puede hallar con el valor del parámetro buscado

$$S \begin{cases} x = 2 \left(-\frac{1}{5}\right) \\ y = 3 + \left(-\frac{1}{5}\right) \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow S \left(-\frac{2}{5}, \frac{14}{5}, -1\right) \Rightarrow d(P, S) = \sqrt{\left[1 - \left(-\frac{2}{5}\right)\right]^2 + \left[0 - \frac{14}{5}\right]^2 + [0 - (-1)]^2}$$

$$d(P, S) = \sqrt{\left(1 + \frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{14}{5}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \frac{196}{25} + 1} = \sqrt{\frac{49 + 196 + 25}{25}} = \sqrt{\frac{270}{25}} = \frac{\sqrt{270}}{5} = \frac{3\sqrt{30}}{5} u$$